Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $y + 1 - \cos(y) - xy = 0$ lokal bei $(0,0)$ nach y auflösbar ist. Berechnen Sie $g'(0)$ für so eine Auflösung $y = g(x)$.

T2. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

lokal bei $(0, 1, -1)$ nach (y, z) auflösbar ist. Bestimmen Sie $Dg(0)$ für so eine Auflösung $(y, z) = g(x)$.

T3. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f auf der Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 - 1 &= 0 \\ x_1 x_2^3 + x_1 x_3 + x_2^2 x_4^2 - x_4 x_5 &= 0 \\ x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3^2 + x_4 x_5^2 &= 0 \end{aligned}$$

lokal bei $(0, 1, -1, 1, 1)$ nach (x_3, x_4, x_5) auflösbar ist. Berechnen Sie $Dg(0, 1)$ für so eine Auflösung $(x_3, x_4, x_5) = g(x_1, x_2)$.

H2. (4 Punkte) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, auf der Einheitskreiskugel $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

H3. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 10x^2 - 24xy$, auf der Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

H4. (4 Punkte) Seien $t_1, \ldots, t_n$ positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt[n]{t_1 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}$$

gilt. (Anleitung: Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, auf der Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1 \text{ und } x_i > 0 \text{ für } i = 0, \ldots, n\}$. Beachten Sie, dass für positive reelle Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ der Punkt

$$\left(\frac{t_1}{t_1 + \cdots + t_n}, \ldots, \frac{t_n}{t_1 + \cdots + t_n} \right)$$

auf M liegt.)

Abgabe: Bis Freitag, 23.6.17, 12:15.