Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1. Seien $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ und $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Zeigen Sie, dass die Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar ist, wenn A und D invertierbar sind. Wie sieht in diesem Fall die inverse Matrix aus?

T2. Bestimme alle Extremwerte und Sattelpunkte der folgenden Funktionen: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$,

(b) $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + (y-1)^2$

(c) $f(x,y) = x^2 e^y - y^2$.

T3. An welchen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3 y, x + y^2)$, lokal invertierbar?

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Extremwerte und Sattelpunkte der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 1$,

(b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

(c) $f(x, y) = x + y \sin(x)$.

H2. (4 Punkte) Seien $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Berechnen Sie den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, für den $\sum_{k=1}^{N} \|x - a_k\|^2$ minimal wird.

H3. (4 Punkte) Betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeigen Sie, dass jeder Punkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ genau zwei Urbilder unter f hat. Dann ist f bei $(2, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ lokal invertierbar. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrabbildung im Punkt $(3, 4)$ mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion. Geben Sie die Umkehrabbildung explizit an und berechnen Sie die Ableitung direkt.

H4. (4 Punkte) Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ der Graph der Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4x^2 + y^2$. Bestimmen Sie die Punkte x auf Γ, bei denen der Abstand von x zu $(0, 0, 8)$ minimal wird.

Abgabe: Bis Freitag, 16.6.17, 12:15.