Mathematisches Institut der Universität München
Georg Tamme, Thomas Beekenkamp

SS 17
Blatt 5

Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1. (a) Finden Sie eine Kurve α im $\mathbb{R}^2$, deren Bahn K wie eine liegende 8 aussieht.

(b) Nimmt die Funktion $f(x,y) = x + y$ auf K ein Maximum an? Wenn ja, können Sie die Stelle $(x,y) \in K$ bestimmen, an der das Maximum angenommen wird?

T2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass auch $f + g \colon U \to \mathbb{R}^m$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobimatrix.

(b) Sei nun $m = 1$. Zeigen Sie, dass auch $f \cdot g$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobimatrix.

T3. Welche der folgenden Funktionen sind $o\big((x,y)\big)$?

(a) $f(x,y) = xy$

(b) $g(x,y) = x^2 + y^2$

(c) $h(x,y) = (x^2+y^2)\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}$

$\to$ Seite 2

Hausaufgaben:

H1 (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z, \qquad g(x,y,z) = xy^2 \cos\left(z^3\right).$$

Berechnen sie die Richtungsableitungen von f und g im Punkt $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, in die Richtungen $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ und $\left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$.

H2 (4 Punkte) Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$ und $a = (1,1,0)$, $b = (0,1,1)$. Bestimmen Sie ein

$$c \in \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle$$

gilt.

H3 (4 Punkte) Zeichen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist, aber in 0 nicht stetig differenzierbar.

H4 (4 Punkte) Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und *homogen vom Grad* $p \in \mathbb{N}$, d.h. $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p \cdot f(x)$$

gilt.

Abgabe: Bis Freitag, 2.6.17, 12:15.