Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1 Berechnen Sie die Jacobimatrix[1] der Abbildung $F\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ \log(y) \\ x + y \end{pmatrix},$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

T2 Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz^3)$. Berechnen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z).$$

Was ist $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x, y, z)$?

T3 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0, \end{cases}$$

in ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie die partiellen Ableitungen in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

→ Seite 2

[1] Siehe Satz 2.25.

Hausaufgaben:

H1 (4 Punkte) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(r,\theta,\phi) = \big(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)\big).$$

H2 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $r\colon \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = g(r(x))$. Zeigen Sie, dass $\nabla f(x) = \frac{g'(r(x))}{r(x)} \cdot x$ gilt.

H3 (4 Punkte) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5 - 2x^2 - y^2$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen von f.

(b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ von f für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Finden Sie eine differenzierbare Kurve α, deren Bahn ganz in der Niveaumenge $f^{-1}(3)$ verläuft.

(d) Zeigen Sie, dass für α aus (c) der Gradient $\nabla f(\alpha(t))$ für alle t senkrecht auf $\alpha'(t)$ steht.

H4 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0, \end{cases}$$

in 0 nicht differenzierbar ist, indem Sie zeigen dass für den Fehlerterm $\phi(\xi)$ in der Definition der Differenzierbarkeit *nicht* $\phi(\xi) = o(\xi)$ gilt. Das heißt,

$$\frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|} \not\to 0 \text{ für } \xi \to 0.$$

Abgabe: Bis Freitag, 26.5.17, 12:15.