Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1. Betrachten die Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

$$a(x,y) = xy, \qquad b(x,y) = (x-1)(y-1),$$
$$c(x,y) = y - x^2, \qquad d(x,y) = x - y^2.$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen der Funktionen.

(b) Berechnen Sie die partielle Ableitungen der Funktionen an den Stellen x und y.

T2. Welche der folgenden Teilmengen A des metrischen Raums X sind kompakt?

(a) $A = [0,1] \times [0,1] \subset X = \mathbb{R}^2$

(b) $A = \{\frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\} \subset X = \mathbb{R}$.

(c) $A = \mathbb{N} \subseteq X = \mathbb{R}$.

(d) $A = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\} \subseteq X = C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wobei wir $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ betrachten.

T3. Sei X eine Menge. Wir versehen X mit der diskreten Metrik. Beschreiben Sie die kompakten Teilmengen von X.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Skizzieren Sie die Niveaumengen von f und berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

H2. (4 Punkte) Seien a, b positive reelle Zahlen. Skizziere die Mengen

$$E_{a,b} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$$

Finde differenzierbare Kurven, deren Bahn $E_{a,b}$ bzw. V ist. Berechne die Tangentialvektoren, insofern Sie existieren.

H3. (4 Punkte) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und seien $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbare Kurven. Ihr punktweises Skalarprodukt ist die Funktion $\langle \alpha, \beta \rangle \colon I \to \mathbb{R}$, $\langle \alpha, \beta \rangle(x) = \langle \alpha(x), \beta(x) \rangle$. Zeigen Sie, dass $\langle \alpha, \beta \rangle$ differenzierbar ist und für die Ableitung gilt $\langle \alpha, \beta \rangle' = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle$.

H4. (4 Punkte) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass X vollständig ist.

Abgabe: Bis Freitag, 19.5.17, 12:15.