Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1. Gegeben sei eine beliebige Menge X. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$d:\ X \times X \longrightarrow \{0,1\}, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert (d wird als die *triviale* oder *diskrete* Metrik auf X bezeichnet).

T2. Betrachte die Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ sowie die Funktion

$$f:\ \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{für } x = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$d:\ \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad d(x,y) := |f(x) - f(y)|$$

eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert wird.

T3. Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie den Grenzwert, sofern er existiert:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right), \\ b_n &= \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right),\ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right), \\ c_n &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right). \end{aligned}$$

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. (4 Punkte) Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|,$$
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Normen auf $\mathbb{R}^n$ definieren.

(b) Sei $n = 2$. Zeichne die Einheitskugeln

$$B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_1 \leq 1\}, \quad B_\infty := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

H2. (4 Punkte) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.

(a) Definiere die Norm $\| \cdot \|$ auf V durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Zeige, dass

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

gilt.

(b) Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der Max-Norm $\| \cdot \|_\infty$. Zeige, dass es kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gibt mit

$$\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

H3. (4 Punkte) Betrachte die Menge aller 0-1-Folgen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Für zwei Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei $k_0 := \inf\{k \in \mathbb{N} \ : \ x_k \neq y_k\} \in \mathbb{N} \cup \infty$. Zeige, dass

$$d\big((x_k), (y_k)\big) := 2^{-k_0},$$

wobei $2^{-\infty} = 0$, eine Metrik auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definiert.

H4. (4 Punkte) Betrachte die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der sup-Norm $\| \cdot \|_\infty$ (vgl. Bsp. 1.3(e) der Vorlesung): Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$a_n(x) = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right),$$
$$b_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right),$$
$$c_n(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4n}\right).$$

Konvergieren diese Folgen bzgl. der sup-Norm? Bestimme den Grenzwert, sofern er existiert.

Abgabe: Bis Freitag, 5.5.17, 12:15.