Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{y}{x} + x$$

Lösung: Wir erkennen das durch

$$y' = y \cdot \frac{1}{x} + x$$

eine inhomogene lineare DGL gegeben ist und wenden Satz 4.13 an (mit $a(x) := \frac{1}{x}$ und $b(x) = x$). Demnach ist durch

$$\phi = (y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi_0(t)} \cdot b(t)\,\mathrm{d}t) \cdot \phi_0(x)$$

eine Lösung gegeben. Hierbei ist $\phi_0(x) := \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t)$. Es gilt:

$$\phi_0(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t) = \exp([\ln(t)]_{x_0}^{x}) = \exp(\ln(x) - \ln(x_0)) = \exp(\ln(\frac{x}{x_0})) = \frac{x}{x_0}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi_0(t)} \cdot b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{x_0}{t} \cdot t\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} x_0\,\mathrm{d}t = [x_0 \cdot t]_{x_0}^{x} = x_0 x - x_0^2$$

Wir erhalten als Lösung:

$$\phi = (y_0 + x_0 x - x_0^2) \cdot \frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{x_0} x + x^2 + x_0 x.$$

Durch Testen verifizieren wir die Lösung:

$$\phi' = \frac{y_0}{x_0} + 2x + x_0 = (\frac{y_0}{x_0} x + x^2 + x_0 x) \cdot \frac{1}{x} + x = \frac{\phi}{x} + x$$

T2. Bestimmen Sie die Lösung des AWP

$$y' = (1 + x^2)(1 + y^2) \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}), \quad y(0) = 0$$

Lösung: Wir wenden Satz 4.5 an (mit $f(x) = 1 + x^2$, $g(y) = 1 + y^2$):

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} 1 + t^2\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^x = x + \frac{x^3}{3}$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \arctan(s)_0^y = \arctan(y) - \arctan(0) = \arctan(y)$$

Die Umkehrfunktion des arctan ist der tan:

$$G^{-1}(x) = \tan(x)$$

Also ist die Lösung durch

$$\phi = G^{-1}(F(x)) = tan(x + \frac{x^3}{3})$$

gegeben. Test:

$$\phi' = (1 + \tan^2(x + \frac{x^3}{3}))(1 + x^2) = (1 + \phi^2)(1 + x^2)$$

T3. Bestimmen Sie die Lösung des AWP

$$y' = \frac{xy - 1}{1 - x^2} \quad (x \in (-1, 1), y \in \mathbb{R}), \quad y(0) = 0$$

Lösung: Es gilt:

$$y' = \frac{xy - 1}{1 - x^2} = y \cdot \frac{x}{1 - x^2} - \frac{1}{1 - x^2}.$$

Also handelt es sich um eine inhomegene lineare DGL. Wir wenden wieder Satz 4.13 an (mit $a(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $b(x) = \frac{1}{1-x^2}$):

$$\phi_0(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t) = \exp(\int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t) = \exp(\int_0^x \frac{1}{-2}\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t) \overset{(*)}{=}$$

$$\exp(\left[|-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)| \right]_0^x) \overset{(**)}{=} \exp(-\frac{1}{2}(\ln(1-x^2) - \ln(1))) = \exp(\ln(1-x^2))^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

zu $(*)$*:* Es gilt $\int \frac{u'}{u} = \ln(|u|) + c$.
zu $(**)$*:* $\ln(1-t^2) < 0$ für alle $t^2 > 0$. Daher gilt: $-\frac{1}{2}\ln(1-t^2) > 0$ für alle $t^2 > 0$ und die Betragsfunktion kann weggelassen werden.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi_0(t)} \cdot b(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-(1-t^2)^{-1})\,\mathrm{d}t = -\int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\left[\arcsin(t)\right]_0^x = -\arcsin(x)$$

Damit ist nach Satz 4.13:

$$\phi = -\arcsin(x) \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Wir testen:

$$\phi' = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + (-\arcsin(x))(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) =$$

$$-\frac{1}{1-x^2} + (-\arcsin(x))\frac{x}{1-x^2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \phi\frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^2}$$