MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 11

Aufgabe 1

Finden Sie (wo noch nicht gegeben) geeignete Parametrisierungen der angegebenen Wege γ in der komplexen Ebene und berechnen Sie jeweils das (komplexe) Kurvenintegral $\int_\gamma f ds$ für die Fälle

(a) $f(z) = |z|$, wobei γ einmal auf der imaginären Achse und einmal auf dem Einheitshalbkreis mit positivem Realteil von $-i$ nach i läuft.

(b) $f(z) = |z|^2$ entlang der Ellipse $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ wobei $a, b > 0$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f_\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f_\alpha(x, y, z) = \left(\alpha\frac{z}{x}\ ,\ \frac{z}{y}\ ,\ \ln(xy)\right)^T , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(f_\alpha)$ und bestimmen Sie, für welche Werte von α das Vektorfeld f_α Gradient eines Potentials ist; d.h. für welche Werte von α existiert eine skalare Funktion F mit der Eigenschaft $f_\alpha = \nabla F$. Versuchen Sie das Potential F explizit anzugeben.

(b) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f_α entlang der Kurve

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \left(e^{t^2}\ ,\ 1\ ,\ \sin\pi t\right)^T .$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3, \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||^3} \ ,$$

entlang dem Vivianschen Fenster:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 4\pi]$$

(a) Berechnen Sie rot f und entscheiden Sie, ob es sich bei f um ein konservatives Vektorfeld handelt. Was bedeutet Ihr Ergebnis für das Kurvenintegral und warum?

(b) Suchen Sie nach einem Potential von f (siehe Aufgabe 2). Was bedeutet Ihr Ergebnis für das Kurvenintegral und warum?

Tipp: Betrachten Sie den Gradienten von $\frac{1}{||\boldsymbol{x}||^\alpha}$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral explizit.

Bemerkung: Das Viviansche Fenster ergibt sich als Schnitt der Einheitskugel mit einem Zylinder von halbem Radius und Mittelpunkt auf dem halben Radius der Kugel.

Abgabe: Dienstag, 24.1.2012 12 Uhr.