MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ in jede Richtunge $v \in \mathbb{R}^2$ eine Ableitung besitzt (also insbesondere partiell differenzierbar ist), aber nicht total differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber die Ableitungen nach x und y nicht vertauschen. Ist $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}f)$ in $(0,0)$ stetig?

Aufgabe 2

Es bezeichne $||\cdot||$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ und $\Delta := \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2$ den Laplace-Operator, mit der Kurznotation $\partial_x \equiv \frac{d}{dx}$ und $\partial_x^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}$.

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ \rho(\boldsymbol{x},t) = t^{-n/2}\exp(-||\boldsymbol{x}||^2/(4t))$ ist eine Lösung der Diffusionsgleichung $\Delta\rho - \partial_t\rho = 0$.

(b) Sei $c > 0$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$, $\omega = c \cdot ||\boldsymbol{k}||$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $F(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$ die Wellengleichung $c^2\Delta F - \partial_t^2 F = 0$ löst.

Aufgabe 3

Die Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_f$ von f.

Anmerkung: $\mathcal{J}_f$ wird uns bei der mehrdimensionalen Integration wieder begegnen.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die zweidimensionale Gaußfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, sowie für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ die Abbildung $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_c(t) = (c\cos(t), c\sin(t))$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$, sowie die Ableitung $\gamma_c'(t)$ und zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass $\gamma_c'(t)$ für alle c und t senkrecht auf $\nabla f(\gamma_c(t))$ steht.

(b) Bestätigen Sie das Ergebnis aus (a) mit Hilfe der Kettenregel.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie der Graph der zweidimensionalen Gaußfunktion und die Kurve $\gamma_c(t)$ jeweils aussehen (Skizze). Offenbar ist für festes c durch $(x,y) = \gamma_c(t)$ wegen $f(\gamma_c(t)) = e^{-c^2}$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ausgezeichnet, auf der f konstant ist. Solche Mengen heißen in der Mathematik Niveaulinien (oder allgemeiner Niveaumengen) von f und in der Physik Äquipotentiallinien. Warum war zu erwarten, dass der Gradient von f senkrecht auf den Niveaulinien steht (in welche Richtung zeigt der Gradient?).

Abgabe: Dienstag, 29.11.2011 12 Uhr.