MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1

Seien X, Y metrische Räume.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to Y$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert. Zeigen Sie: f ist stetig.

(b) Gilt dieser Schluss auch, wenn f_n punktweise gegen f konvergiert? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^k}$$

nicht gleichmäßig konvergent ist. Skizzieren Sie den Graphen des punktweisen Limes und das Verlassen eines ε-Schlauches durch f_n.

Zeigen Sie, dass f_n dagegen auf $[\delta, 1]$ für ein $\delta > 0$ gleichmäßig konvergiert.

Anleitung: Überlegen Sie sich für die Skizze den punktweisen Limes von f_n für die Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$ getrennt. Verwenden Sie im Fall $x \neq 0$ die Formel für die geometrische Reihe und betrachten Sie den Limes $n \to \infty$. Um nun zu zeigen, dass f_n nicht gleichmäßig konvergiert, betrachten Sie für die Folge $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ den Ausdruck $|f_n(x_n) - f(x_n)|$, wobei f den punktweisen Limes von f_n bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck für große n nicht beliebig klein wird (die Folgendarstellung der Eulerschen Zahl wird Ihnen dabei behilflich sein).

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es unter der Annahme einer stetigen Temperaturverteilung auf der Erde immer zwei genau gegenüberligende Punkte gibt, an denen die Temperatur genau gleich ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die 2-Sphäre:

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R,\ R > 0\}$$

zusammenhängend ist.

Aufgabe 4

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{C}([0,1])$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, mit der p-Norm, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$||f||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{wobei} \qquad ||f||_\infty \equiv \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \ .$$

(a) Zeigen Sie: $||f||_1 \leq ||f||_\infty$ für alle $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

(b) Zeigen Sie, dass die Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$ nicht äquivalent sind.

(c) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ nicht äquivalent sind.

Anleitung: Bei Aufgabenteil (b) bietet es sich an (motiviert durch (a)), eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu konstruieren, sodass $||f_n||_\infty$ konstant für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, aber $||f_n||_1$ beliebig klein für große n wird. Konstruieren Sie für Aufgabenteil (c) eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $||f_n||_1$ konstant ist und $||f_n||_2$ für $n \to \infty$ gegen Unendlich geht.

Abgabe: Dienstag, 22.11.2011 12 Uhr.