Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:

(*Tipp:* Verwenden Sie das Folgenkriterium)

(a)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{falls } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{sonst}\end{cases}$$

(b)

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{falls } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst}\end{cases}$$

(c) Eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ heißt partiell stetig im Punkte (x_0,y_0), wenn $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x,y_0)$ und $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y\mapsto f(x_0,y)$ in x_0 bzw. y_0 stetig sind. Offenbar sind stetige Funktionen auch partiell stetig (warum?). Gilt auch die Umkehrung? Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f \text{ partiell stetig } \Longrightarrow f \text{ stetig}$$

Aufgabe 2

Sei $a\geq 0$. Betrachten Sie die Menge

$$\mathcal{M}_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-x^2\leq a\}\setminus\{(0,0)\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_0$ nicht zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_a$ für $a>0$ sogar wegzusammenhängend ist.

Hinweis: Skizzieren Sie die Mengen $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_a,\ a>0$ zuerst.

Aufgabe 3

Sei X ein metrischer Raum.

(a) Sei $x, y, z \in X$, γ_1 ein Weg von x nach y in X und γ_2 ein Weg von y nach z in X. Zeigen Sie, dass es einen Weg von x nach z in X gibt.

(b) Betrachten Sie für $x, y \in X$ die Relation

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \text{ ein Weg } \gamma \text{ von } x \text{ nach } y \text{ in } X$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung: Die Menge $[y] = \{x \in X | x \sim y\}$ heißt Wegzusammenhangskomponente von y.

Abgabe: Dienstag, 15.11.2011 12 Uhr.