MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1

Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$, wobei d die diskrete Metrik bezeichnet (siehe Blatt 1). Zeigen sie, dass in diesem Falle $[0, 1]$ zwar abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 2

Sei $X = [0, \infty)$, ausgestattet mit der durch die Einschränkung der Standardmetrik von $\mathbb{R}$ erzeugten Spurmetrik d_X (siehe Blatt 1). Sei $U := (0, 1] \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass U nicht kompakt ist. Finden Sie dazu eine offene Überdeckung von U, von der Sie zeigen können, dass sie keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(b) Finden Sie ein $y \in X$, sodass Sie für jedes $\varepsilon > 0$ nach Hinzunahme der offenen Menge $B_\varepsilon(y)$ zur obigen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung von $U' := U \cup B_\varepsilon(y)$ angeben können.

Bemerkung: Da damit nur für *eine* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gefunden wurde, ist natürlich noch nicht gezeigt, dass U' tatsächlich kompakt ist. Wie könnte man am geschicktesten zeigen, dass dies tatsächlich der Fall ist?

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{-x}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_k = k$.

(*c*) Sei ∞ ein beliebiges Element, das nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Setzen Sie d so auf $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu einer Metrik $\tilde{d}$ fort, dass die Folge aus (b) zu einer konvergenten Folge wird.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende, stetige Funktion. Betrachten Sie die Abbildung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$.

(a) Zeigen Sie, dass durch d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie nun allgemein, was Sie für einen speziellen Fall in Aufgabe 3 gezeigt haben:

$$f \text{ beschränkt } \Longrightarrow (\mathbb{R}, d) \text{ ist nicht vollständig.}$$

(c) Beweisen Sie nun, dass dagegen folgendes gilt:

$$f \text{ nach oben und unten unbeschränkt } \Longrightarrow (\mathbb{R}, d) \text{ ist vollständig.}$$

Bemerkung: Führen Sie die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, d)$ auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik zurück. Verwenden Sie an geeigneter Stelle die Surjektivität von f, die sich aus der Unbeschränktheit und Stetigkeit ergibt.

Abgabe: Dienstag, 8.11.2011 12 Uhr.