MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 1

Aufgabe 1

Sei X eine Menge. Die *diskrete Metrik* d auf X ist definiert durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei d tatsächlich um eine Metrik handelt.

(b) Seien X, Y metrische Räume, wobei X mit der diskreten Metrik ausgestattet ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall jede Funktion $f : X \to Y$ stetig ist.

(c)Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, wobei d_Y die diskrete Metrik bezeichnet. Zeigen Sie, dass für jede Abbildung $f : X \to Y$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist stetig.

(ii) f ist lokal konstant, d.h. für jedes $x_0 \in X$ gibt es ein $r(x_0) \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$f(x) = f(x_0) \qquad \forall\, x \in B_{r(x_0)}(x_0)\ .$$

Aufgabe 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Dann erhalten wir durch Einschränkung der Abbildung d auf $Y \times Y$ eine Metrik d_Y auf Y. Wir nennen d_Y eine eingeschränkte Metrik oder Spurmetrik. Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subset Y$ als offen bzw. abgeschlossen in Y , wenn U bezüglich der eingeschränkten Metrik auf Y offen bzw. abgeschlossen ist.

Zeigen Sie: Die offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen in Y sind genau die Teilmengen der Form $Y \cap U$, wobei U die offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen von X durchläuft.

Bemerkung: Das bedeutet natürlich nicht, dass die in Y offenen (abgeschlossenen) Mengen auch offen (abgeschlossen) in X sein müssen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Rand, Inneres und Abschluss der folgenden Teilmengen

(a) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}$

(c) $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 | -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}^3$

(d) $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 | -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \subset E = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 | x,y \in \mathbb{R}\}$ bezüglich der eingeschränkten Metrik d_E, die durch die Einschränkung der Standardmetrik von $\mathbb{R}^3$ auf E erzeugt wird (siehe Aufgabe 2).

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine *Halbnorm* ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sodass $\forall\ v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $i) ||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v||$ und $ii) ||v+w|| \ \leq ||v|| + ||w||$. Die durch eine Halbnorm erzeugte Abbildung $d : V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ \ (v,w) \mapsto ||v-w||$ wird *Halbmetrik* oder *Pseudometrik* genannt (insbesondere ist bei einer Halbmetrik – im Gegensatz zu einer Metrik – offenbar für $v, w \in V$ mit $v \neq w$ auch $d(v,w) = 0$ möglich).

(a) Sei $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten, integrierbaren Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ durch

$$||f||_1 := \int_a^b |f| dx$$

zwar eine Halbnorm, aber *keine Norm* auf $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ gegeben ist.

(b) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass bezüglich der durch die sup-Norm $||f||_\infty$ induzierten Metrik die Menge der stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie nun, dass die Menge der stetigen Funktionen bezüglich der durch die Halbnorm $||\cdot||_1$ induzierten Halbmetrik *nicht* abgeschlossen in $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ ist.

Bemerkung: Die Aussagen von Aufgabenteil (b) hängen nicht an der Halbnorm. Sie gelten ebenso, wenn beispielsweise $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ durch die linksseitig stetigen Funktionen auf $[a,b]$ ersetzt wird, allerdings definiert dann $||\cdot||_1$ tatsächlich eine Norm (warum?).

Abgabe: Mittwoch, 2.11.2011 12 Uhr.