Prof. Dr. Andreas Rosenschon Sommersemester 2025

Konstruktionen und Beispiele in der algebraischen Geometrie

Organisation. Das Seminar findet Donnerstags 10-12 in B 134 statt. Jeder Teilnehmer sollte 1-2 Vorträge halten; diese werden in der Vorbesprechung am 24.4. in B 134 vergeben.

Die Beschreibung der Vorträge ist sehr detailiert, d.h. die Ausarbeitung sollte weitgehend selbstständig möglich sein. Das Grundkonzept eines Vortrags sollte eine Woche vor dem Vortrag in der Sprechstunde vorgestellt werden.

Literatur

[1] J. Harris, *Algebraic geometry. A first course*, Springer 1992.

[2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer 1977.

[3] K. Hulek, *Elementare algebraische Geometrie*, Viehweg 2000.

[4] M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, LMS student texts 1988.

[5] K. Smith at al, *An invitation to algebraic geometry*, Springer 2000.

1. **Projektionen und Kegel**

   Basiert auf [1, Lecture 3]. Man definiere die Projektion von einem Punkt (Example 3.4) und beweise Theorem 3.5 (ohne zu detailiert auf die Resultante von zwei Polynomen einzugehen). Das Bild einer projektiven Varietät ist wieder eine projektive Varietät: man betrachte dazu die Spezialfälle auf Seite 38 und beweise dann Theorem 3.12. Der Kegel über einer Varietät: der Spezialfall in Example 3.1 und der allgemeine Fall in Example 3.10. Man vergleiche dies mit [2, Exercise I 2.10].

2. **Quadriken und Grassmannsche**

   Grundlage ist [1, Lecture 1,3,6]. Man wiederhole den Bezug zwischen Bilinearformen und quadratischen Formen (k algebraisch abgeschlossen mit $char(k) \neq 2$) von Example 3.3 und definiere Quadriken in $\mathbb{P}^n$. Man erkläre Quadriken in $\mathbb{P}^2$ und rationale Normkurven vom Grad 2, vgl. Example 1.20. Definiere $G(k,n)$ als Varietät und erkläre $G(k,n) = \mathbb{G}(k-1, n-1)$; Example 6.6. Behandle die Plücker Gleichungen von Example 6.2..

3. **Inzidenzvarietäten**

   Vorlage ist [1, Lecture 6]. Untervarietäten von Grassmannschen: Man definiere die Schubertvarietät Σ_l und zeige, dass diese eine Untervarietät ist, vgl. Seite 66. Man definiere die Inzidenzvarietät $\Sigma \subseteq \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}^n$ als projektive Varietät, vgl. Example 6.12.. Erkläre Beispiel 6.14.. Fanovarietäten von Geraden $l \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^n$: Example 6.19.. Man diskutiere den Join zweier disjunkter Varietäten und zeige unter Verwendung von Proposition 6.13, dass das Join wieder eine projektive Varietät definiert.

4. **Beispiele algebraischer Gruppen**

   Basiert auf [1, Lecture 10]. $GL(n)$ als affine Varietät (als offene Menge in $\mathbb{A}^{n^2}$ oder als abgeschlossene Menge in $\mathbb{A}^{n^2+1}$); zeige die Multiplikation ist regulär, siehe Example 1.10.. Behandle analog die Gruppen $SL(n)$ und $PGL(n)$. Gebe eine formale Definition von algebraischen Gruppen wie auf Seite 114. Eine algebraische Gruppe G wirkt auf einer Varietät durch einen regulären Morphismus $G \times X \to X$, siehe Examples 10.4.-10.6.. Behandle die Wirkung von $PGL(2)$ auf $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P}^3$, Example 10.8. und Example 10.9.. Erkläre die Wirkung von $PGL(2)$ auf $\mathbb{P}^4$ und die j-Invariante, vgl. Example 10.12. Falls Zeit bleibt: Diskutiere die Quotienten endlicher Gruppenwirkungen auf affinen Varietäten, Seiten 122-124.

5. **Tangentialraum und Gauss Abbildung**

   Referenz ist [1, Lecture 14]. Man wiederhole die Definition des Tagentialraums einer affinen oder projektiven Varietät an einem Punkt, sowie die dabei auftretenden Begriffe der kommutativen Algebra (Dimension und Regularität von lokalen Ringen). Definiere den Tangentialraum als Kern des Differentials wie auf Seite 174, und berechne einfache Beispiel, z.B. die Kurven $y^2 = x^3$ in $\mathbb{A}^2$. Der projektive Tangentialraum, Seite 181 bis Exercise 14.12.. Man definiere die Gauss Abbildung von Example 15.2. für glatte Varietäten und zeige, dass das Bild der Gaussabbildung einer Hyperfläche vom Grad ≥ 2 endlich ist. Man beschreibe den Tangentialraum von $G(k, n)$ wie in Example 16.1..

6. **Ebene kubische Kurven**

   Quelle hier ist [3, Chapter 4] (englische Version). Ziel ist es, durch homogene kubische Polynome gegebene Hyperflächen in $\mathbb{P}^2$ zu klassifizieren. Der reduzible Fall: Man formuliere Lemma 4.1. (ohne Beweis) und Proposition 4.10.. Schnittmultiplizität und Satz von Bezout: Man definiere die Schnittmultiplizität zweier Kurven und berechne dies in einem Beispiel, Example 4.7.. Man formuliere den Satz von Bezout und beweise den Spezialfall, wenn eine der Kurven eine Gerade ist. Beweis von Proposition 4.10.. Der singuläre irreduzible Fall: Proposition 4.11 (ohne Beweis). Der glatte Fall: Beweise wie in Proposition 4.23, dass jede glatte Kubik projektiv äquivalent zu einer Kubik in Weierstrassform ist. Diskriminante einer Kubik in Weierstrassform und Glattheit, siehe Proposition 4.24.. Die j-Invariante und projektive Äquivalenz, Proposition 4.28.

7. **Geraden auf kubischen Flächen**

   Grundlage ist [3, Chapter 5] (siehe auch [4]). Es geht um Ansätze für einen Beweis des berühmten Satzes, dass eine glatte kubische Fläche in $S \subseteq \mathbb{P}^3$ genau 27 Geraden enthält. Der Tangentialraum an einem Punkt schneidet S in einer speziellen Kubik. Für mindestens einen Punkt ist dieser Schnitt noch spezieller, siehe Lemma 5.3.; der Beweis verwendet den Beweis von Proposition 4.11, erkläre diesen. Wiederhole (kurz) die Resultante zweier Polynome und zeige wie in Theorem 5.1., dass jede glatte Kubik S eine Grade enthält. Diskutiere Remark 5.3., d.h. die Begründung, warum man genau 27 Geraden erwartet.

8. **Rationale Abbildungen**

   Referenz ist [1, Lecture 7, 18]. Wiederhole die Definition einer rationalen Abbildung und des Funktionenkörper eine irreduziblen affinen Varietät, vgl. Seiten 73-75. Eine dominante rationale Abbildung $X \to Y$ definiert eine Körpererweiterung $k(Y) \subseteq k(X)$. Erkäre die Begriffe 'birational', 'rational', 'unirational' und was sie für die Funktionenkörper bedeuten. Quadriken $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ sind rational, vgl. Example 7.11.. Glatten Kubiken $S \subseteq \mathbb{P}^3$ sind unirational, Example 18.19, siehe auch [3, Theorem 5.19].

9. **Aufblasungen**

   Basiert auf [1], [2] und [5]. Erkläre den Satz von Hironaka, vgl. [5, Seite 106, 119]. Aufblasung eines Punktes: siehe [1, Example 7.17], vgl. [2, Seiten 28-30] und [5, Seiten 107-109]. Diskutiere die Beispiele der Kurve $y^2 = x^3 + x^2$ [2, Example I.4.9] und des 2-dimensionalen Kegels [5, Seiten 110-112]. Behandle den allgemeinen Fall einer Aufblasung einer Untervarietät, siehe [1, Example 7.18] und [5, Seiten 117-119]. Formuliere und erkläre (ohne Beweis) [1, Theorem 7.21]. Behandle [1, Example 7.22].

10. **Abelsche Varietäten**

    to be continued ...