

## Tutoraufgaben

### Aufgabe T1

Wie oft müssen wir eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit  $p$  Kopf zeigt, mindestens werfen, damit die relative Häufigkeit von Kopf mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 um höchstens 0.01 von  $p$  abweicht? Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalapproximation eine Abschätzung für die Anzahl der benötigten Würfe!

### Aufgabe T2

In der angewandten Statistik gibt es die "Daumenregel", daß für viele Arten von Meßgrößen ca. 5% der Meßergebnisse mehr als zwei Standardabweichungen von dem Erwartungswert abweichen. Geben Sie eine theoretische Begründung für diese Daumenregel.

## Hausaufgaben

### Aufgabe H1

An einer Wahl zwischen zwei Kandidaten  $A$  und  $B$  nehmen 1 000 000 Wähler teil. Davon kennen 2000 Wähler den Kandidaten  $A$  aus Wahlkampfveranstaltungen und stimmen geschlossen für ihn. Die übrigen 998 000 Wähler sind mehr oder weniger unentschieden und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit  $p_A$  für einen Sieg von Kandidat  $A$ ?

### Aufgabe H2

Sei  $\lambda > 0$  gegeben und  $X_n, n \geq 1$  eine Folge von Zufallsvariablen, die jeweils  $\text{Geo}(\min\{\frac{\lambda}{n}, 1\})$ -verteilt sind. Zeigen Sie, dass die Folge  $\frac{X_n}{n}$  in Verteilung gegen  $\text{Exp}(\lambda)$  konvergiert.

### Aufgabe H3

Eine Illustration zum zentralen Grenzwertsatz. Die Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien iid exponentialverteilt mit Parameter 1. Wir setzen

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{und} \quad Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Dichten  $f_{S_n}$  bzw.  $f_{Z_n}$  von  $S_n$  bzw.  $Z_n, n \in \mathbb{N}$  explizit und stellen Sie diese (am besten mit Hilfe eines Computers) für  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  graphisch dar. (Plotten Sie zwei Diagramme, eines für die  $f_{S_n}$  und eines für die  $f_{Z_n}$ .) Stellen Sie im zweiten Diagramm auch die Dichte der Standardnormalverteilung dar.
- (ii) Zeigen Sie, dass  $f_{Z_n}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Dichte der Standardnormalverteilung konvergiert.

*Hinweis:* Taylorentwickeln Sie  $\log f_{Z_n}$  um 0 bis zur zweiten Ordnung und verwenden Sie Stirlings Formel.

### Aufgabe H4

Es sei  $0 < p < 1$ . Weiter sei  $X_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Bernoulli( $p$ )-Folge, also iid Zufallsvariablen mit Werten in  $\{0, 1\}$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit  $\mathbb{P}[X_n = 1] = p$ . Wir setzen

$Z : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ,

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n.$$

Es bezeichne  $\mu_p := \mathbb{P}_Z$  die Verteilung von  $Z$ . Insbesondere ist  $\mu_{1/2}$  die Gleichverteilung auf  $[0, 1]$ . Zeigen Sie:

- (i) Die Verteilungsfunktion von  $Z$  ist stetig.
- (ii) Ist  $p \neq 1/2$ , so gibt es ein  $M \in \mathcal{B}([0, 1])$  mit  $\mu_{1/2}(M) = 0$  und  $\mu_p(M) = 1$ .

Man sagt hierzu:  $\mu_{1/2}$  und  $\mu_p$  sind *orthogonal zueinander*.

*Hinweis:* Verwenden Sie das starke Gesetz der großen Zahlen.

### Quantile der Standardnormalverteilung

	*0	*1	*2	*3	*4	*5	*6	*7	*8	*9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1*	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2*	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3*	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4*	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5*	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6*	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7*	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8*	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9*	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0*	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Abgabe der Hausaufgaben bis 22.12.2014, 12:15 Uhr, in den Übungskasten