Klausuraufgaben zur "Analysis einer Variablen" vom 23.2.2013

1. (a) Formulieren Sie eine Version des Induktionsprinzips, die zur Lösung der folgenden Teilaufgabe (b) nützlich ist.

   (b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ganzer Zahlen sei rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a_0 &:= 0, \\ a_1 &:= 2, \\ a_{n+1} &:= 4(a_n - a_{n-1}) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

   Beweisen Sie induktiv: $a_n = n2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises, insbesondere der Induktionsvoraussetzung.

2. (a) Definieren Sie für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen und $b \in \mathbb{C}$ die Aussage

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b.$$

   Hinweis: Die Begriffe "Konvergenz", "Grenzwert" oder "Limes" sollen hier nicht als bekannt vorausgesetzt werden.

   (b) Nun seien

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i}$$

   für $n \in \mathbb{N}$ und $b = 1$ gegeben. Beweisen Sie hierfür die Aussage $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ *direkt mit der Definition aus (a)*. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises. *Hinweis:* Es bedeutet i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$.

3. (a) Definieren Sie für eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ die Aussage "f ist gleichmäßig stetig".

   (b) Definieren Sie, wann eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ eine Cauchyfolge genannt wird. *Hinweis:* Gefragt ist hier die *Definition* von Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$, nicht eine äquivalente Charakterisierung.

   (c) Nun seien $M \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge, $f : M \to \mathbb{C}$ eine gleichmäßig stetige Funktion und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge mit Werten in M. Beweisen Sie, dass $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Cauchyfolge ist. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises.

   (d) Geben Sie ein Beispiel einer Menge $M \subseteq \mathbb{C}$, einer *stetigen* Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ und einer Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in M an, für die $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Cauchyfolge ist. *Hinweis:* Die explizite Angabe eines Gegenbeispiels genügt; ein Beweis für die Korrektheit des Gegenbeispiels ist *nicht* verlangt.

4. (a) Stellen Sie $\sin x$ und $\cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion und arithmetischen Operationen dar.

   (b) Formulieren Sie die allgemeine binomische Formel aus der Vorlesung. *Hinweis:* Gemeint ist *nicht* nur der Spezialfall für Quadrate aus der Schulmathematik.

   (c) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$$

   Hierbei steht $\sin^{2n} x$ für $(\sin x)^{2n}$.

5. (a) Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und eine Funktion $f :]-r, r[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Definieren Sie, was die Aussage

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + b + cx^2 + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0$$

   bedeutet.

   (b) Geben Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ an, so dass gilt:

$$\frac{1}{1 - \cos x} = \frac{a}{x^2} + b + cx^2 + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0.$$

   Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Rechnung. *Hinweis:* Korrekte Rechenregeln für die Landausymbole dürfen Sie hier ohne Begründung verwenden.

6. (a) Finden Sie eine Stammfunktion F der Funktion

$$f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}.$$

   (b) Entscheiden Sie mit Beweis, ob die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

   in $\mathbb{R}$ konvergiert. *Hinweis:* Eine mögliche Lösung vergleicht Summanden $1/(n(\log n)^2)$ mit Zuwächsen der in (a) gefundenen Stammfunktion F.

7. Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^{\infty} \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2} \, dx$$