Logisches Schließen in der Mathematik

Probevorlesung am Campustag der LMU

Prof. Dr. Franz Merkl

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik (Stochastik)

LMU München

1. Februar 2025

Überblick:

Ein wichtiger Unterschied zwischen der Mathematik an der Schule und der Mathematik hier bei uns an der Universität ist, dass wir mathematische Lehrsätze nicht nur veranschaulichen und an Beispielen illustrieren, sondern präzise *durch logisches Schließen beweisen*. Dabei gehen wir von wenigen gegebenen Grundtatsachen, den *Axiomen*, aus. Die Regeln der *Logik*, nach denen solche mathematische Herleitungen erfolgen, sollen in der heutigen Vorlesung vorgestellt werden. Dabei betrachten wir zwei aufeinander aufbauende Teile der Logik:

- Die *Aussagenlogik* beschäftigt sich damit, wie Wahrheitswerte von verknüpften Aussagen aus den Wahrheitswerten der Teile gewonnen werden. Wir diskutieren Beweisschemata, die auf solchen aussagenlogischen Schlüssen beruhen.

- Die *Prädikatenlogik* beschäftigt sich mit Formeln, in denen auch Variablen für Objekte x vorkommen können, die dann mit sogenannten *Quantoren* "*für alle* x" und "*es existiert* x" *gebunden* werden können.

Aussagenlogik

Aussagen können durch Verknüpfungen "und", "oder", "nicht", "impliziert", "ist äquivalent zu" verbunden werden. Diese Operationen werden auch "Junktoren" genannt. Die Anzahl der Argumente eines Junktors nennt man seine *Stelligkeit*. Der Wahrheitswert der Verknüpfung hängt nur vom Wahrheitswert "wahr, w") oder "falsch, f" der Argumente ab. Er wird durch folgende Tabellen definiert.

Einstelliger Junktor:

a	$\neg a$ nicht a
w	f
f	w

Insbesondere hat $\neg\neg a$ den gleichen Wahrheitswert wie a. Statt "nicht a" sagen wir auch "Negation von a" oder "Gegenteil von a".

Zweistellige Junktoren:

a	b	$a \wedge b$ a und b Konjunktion	$a \vee b$ a oder b Disjunktion	$a \Rightarrow b$ a impliziert b wenn a, dann b	$a \Leftrightarrow b$ a ist äquivalent zu b
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Beispiel: "$1 + 1 = 3 \Rightarrow 2 > 3$" ist wahr, denn sowohl "$1 + 1 = 3$" als auch "$2 > 3$" sind falsch.

Die Implikation beschreibt nicht inhaltliche "Kausalität", etwa "a ist die Ursache für b", sondern nur formale Konstellationen von Wahrheitwerten: "Wenn a wahr ist, dann ist auch b wahr".

Nullstellige Junktoren:

Manchmal nimmt man auch die Aussagenkonstanten "$\top$" (die stets wahre Aussage) und "$\perp$" (die stets falsche Aussage, den Widerspruch) hinzu. Sie besitzen die Wahrheitswerte w bzw. f.

Konventionen zur Klammerersparnis:

- "$\neg$" bindet stärker als "$\wedge$"
- "$\wedge$" bindet stärker als "$\vee$"
- "$\vee$" bindet stärker als "$\Rightarrow$" und "$\Leftrightarrow$"
- "$\Rightarrow$" und "$\Leftrightarrow$" binden gleich stark.
- "bindet stärker" ist transitiv. Das bedeutet: Bindet ein Junktor J_1 stärker als J_2, und J_2 stärker als J_3, so bindet J_1 stärker als J_3.
- "$\wedge$" und "$\vee$" sind linksassoziativ: $a \wedge b \wedge c$ steht also für $(a \wedge b) \wedge c$; analog für "$\vee$". Die Missachtung dieser Regel kann allerdings nicht zu Fehlern führen, weil "$\wedge$" und "$\vee$" assoziative Operationen sind.

Beispiele:

- Die Formel
$$\neg a \vee \neg b \wedge c \Rightarrow d$$
bedeutet:
$$((\neg a) \vee ((\neg b) \wedge c)) \Rightarrow d.$$
- Die Regel "Punkt vor Strich", die Sie aus der Schule kennen, besagt, dass die multiplikativen Operationen "$\cdot$" und ":" stärker als die additiven Operationen "+" und "$-$" binden. Zum Beispiel steht $1+2\cdot 3$ für $1+(2\cdot 3) = 1+6 = 7$. Allerdings sind die arithmetischen Operationen "+", "$-$", "$\cdot$" und ":" keine Junktoren, weil sie Zahlen statt Wahrheitswerte miteinander verknüpfen, und Zahlen statt Wahrheitswerte als Ergebnisse liefern.

Einige aussagenlogische Regeln:

- *Kommutativität von "und":* $a \wedge b$ ist gleichwertig mit $b \wedge a$.
- *Kommutativität von "oder":* $a \vee b$ ist gleichwertig mit $b \vee a$.
- *Assoziativität von "und":* $(a \wedge b) \wedge c$ ist gleichwertig mit $a \wedge (b \wedge c)$.
- *Assoziativität von "oder":* $(a \vee b) \vee c$ ist gleichwertig mit $a \vee (b \vee c)$.

Man lässt daher überflüssige Klammern weg und schreibt zum Beispiel $a \wedge b \wedge c$ statt $(a \wedge b) \wedge c$ sowie $a \vee b \vee c$ statt $(a \vee b) \vee c$.

- **de Morgan'sche Regeln der Aussagenlogik**
  $\neg(\neg a \wedge \neg b)$ ist gleichwertig mit $a \vee b$.
  $\neg(\neg a \vee \neg b)$ ist gleichwertig mit $a \wedge b$.

  Wir begründen das mit je einer Wahrheitstabelle:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$\neg(\neg a \wedge \neg b)$	$a \vee b$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(\neg a \vee \neg b)$	$a \wedge b$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	f	f

  Merkregel: "Erst Negation, dann Konjunktion" ist gleichwertig zu "erst Disjunktion, dann Negation", und umgekehrt.

- **Aussagenlogische Distributivgesetze**
  $a \wedge (b \vee c)$ ist gleichwertig mit $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
  $a \vee (b \wedge c)$ ist gleichwertig mit $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

  Wir begründen das durch je eine Wahrheitstabelle, die alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von a, b und c umfasst:

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

  Man beachte, dass die beiden Distributivgesetze über die de Morgan'sche Regeln miteinander zusammenhängen (Vertauschen von "und" und "oder").

- **Kontraposition**
  $a \Rightarrow b$ ist gleichwertig mit $\neg b \Rightarrow \neg a$

  Begründung durch eine Wahrheitstabelle:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$a \Rightarrow b$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

  Die Kontraposition wird oft wie folgt in Beweisen verwendet: Um eine Behauptung b aus einer Prämisse a zu beweisen, nimmt man an, b sei falsch, und folgert daraus, dass dann auch a falsch sein muss.

Aussagenlogische Herleitungsregeln. Wir besprechen nun einige aussagenlogische Herleitungsregeln, wie sie in Beweisen öfter vorkommen. In den meisten Fällen beruhen sie auf *Tautologien*, also auf *aussagenlogisch allgemeingültigen Formeln*.

1. **Beweis einer Konjunktion:**

   Um $A \wedge B$ zu zeigen, zeigt man einerseits A und andererseits B.

2. **Vorwärtsschließen:** Sind A und $A \Rightarrow B$ gegeben, so können wir daraus B schließen. Das Vorwärtsschließen beruht auf der Tautologie

   $$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B. \tag{1}$$

3. **Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$:**

   Für solch einen Beweis nehmen wir an, dass A gilt. Unter (möglicher) Verwendung von A wird dann B gezeigt. Damit ist $A \Rightarrow B$ gezeigt. In Ausnahmefällen kann es vorkommen, dass die Annahme A im Beweis überhaupt nicht verwendet wird; auch das ist zulässig.

4. **Beweis einer Negation $\neg A$:**

   Dies ist ein Spezialfall der vorhergehenden Strategie, wenn wir die Gleichwertigkeit von $\neg A$ zu $A \Rightarrow \perp$ verwenden, wobei $\perp$ für die Aussagenkonstante "stets falsche Aussage", synonym "Widerspruch", steht:

   Um $\neg A$ zu zeigen, nehmen wir an, dass A gilt. Unter (möglicher) Verwendung von A wird dann ein Widerspruch gezeigt. Damit ist $\neg A$ gezeigt.

5. **Indirekter Beweis:**

   Um A zu zeigen, nehmen wir an, dass $\neg A$ gilt. Unter (möglicher) Verwendung von $\neg A$ wird dann ein Widerspruch gezeigt. Damit ist A gezeigt. Dem indirekten Beweis liegt die Tautologie $(\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$ zugrunde.

6. **Beweis durch Kontraposition:** Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir an, dass $\neg B$ gilt. Unter (möglicher) Verwendung davon wird dann $\neg A$ gezeigt. Damit ist $A \Rightarrow B$ gezeigt.

7. **Beweis durch Fallunterscheidung:** Um eine Aussage B zu zeigen, zeigt man zunächst für geeignete Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Disjunktion $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$. Dann unterscheidet man n Fälle:
   1. Fall: Wir nehmen A_1 an und zeigen damit B.
   2. Fall: Wir nehmen A_2 an und zeigen damit B.
   $\vdots$
   n. Fall: Wir nehmen A_n an und zeigen damit B.
   Damit ist B gezeigt.

   Dieser Herleitungsregel liegt folgendes Schema von Tautologien zugrunde:

   $$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B) \wedge \ldots \wedge (A_n \Rightarrow B) \Rightarrow B \tag{2}$$

8. **Beweis einer Disjunktion – Strategie 1: Zurückführen auf eine Implikation.** Um $A \vee B$ zu zeigen, nehmen wir zunächst $\neg A$ an. Unter dieser Annahme zeigen wir B. Dann ist $A \vee B$ gezeigt. Dieser Herleitungsregel liegt zugrunde, dass $A \vee B$ und $\neg A \Rightarrow B$ den gleichen Wahrheitswert besitzen.

9. **Beweis einer Disjunktion – Strategie 2: Fallunterscheidung.** Um $A \vee B$ zu zeigen, machen wir eine Fallunterscheidung mit einer geeigneten Aussage C:
   1. Fall: Wir nehmen C an. Unter dieser Annahme zeigen wir A.
   2. Fall: Wir nehmen $\neg C$ an. Unter dieser Annahme zeigen wir B.
   Dann ist $A \vee B$ gezeigt.

   Dieser aussagenlogischen Herleitungsregel liegt die Tautologie

   $$(C \Rightarrow A) \wedge (\neg C \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B \tag{3}$$

   zugrunde.

10. **Beweis einer Äquivalenz:** Der Beweis einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ kann durch folgende beiden Beweisteile erfolgen:
    Beweisteil "$\Rightarrow$": Man nimmt die Aussage A an und zeigt unter dieser Annahme die Aussage B.
    Beweisteil "$\Leftarrow$": Man nimmt die Aussage B an und zeigt unter dieser Annahme die Aussage A.

    Dieser aussagenlogischen Herleitungsregel liegt zugrunde, dass $A \Leftrightarrow B$ den gleichen Wahrheitswert wie $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ besitzt.

Ausblick. Mit dem Aufstellen von Wahrheitstafeln haben wir ein allgemeines Verfahren, festzustellen, ob eine gegebene aussagenlogische Formel ϕ mit Aussagenvariablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Tautologie ist. Allerdings ist dieses Verfahren nicht effizient, wenn die Anzahl n groß ist, weil die Wahrheitstabelle dann 2^n Zeilen braucht: So viele Möglichkeiten gibt es nämlich, die Aussagenvariablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit Wahrheitswerten w,f zu belegen. 2^n wächst nämlich mit wachsendem n sehr schnell an, wie die Werte $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1048576$, $2^{100} = 1,26\ldots \cdot 10^{30}$ illustrieren. Es gibt zwar auch andere Verfahren, festzustellen, ob eine gegebene aussagenlogische Formel ϕ eine Tautologie ist, z.B. mit zielgerichteten algebraischen Umformungen oder mit einer systematischen Suche nach einer Herleitung. Keines dieser Verfahren ist jedoch effizient, und es ist auch kein effizientes Verfahren dafür bekannt. Als Mindestanforderung für ein effizientes Verfahren nimmt man üblicherweise, dass die nötige Rechenzeit durch eine Potenzfunktion der Länge des Inputs beschränkt sein soll. Das Problem, entweder ein solches effizientes Verfahren anzugeben oder zu beweisen, dass es kein solches effizientes Verfahren gibt, ist das berühmte P=NP-Problem. Es kann auf viele verschiedene äquivalente Weisen formuliert werden. Es ist das wichtigste ungelöste Problem der sogenannten „*Komplexitätstheorie*“ und eines der wichtigsten ungelösten Probleme sowohl der Mathematik als auch der Informatik.

Prädikatenlogik

Aussagen mit freien Variablen haben a priori keinen Wahrheitswert.

Beispiel: "$x > 2$" hat keinen Wahrheitswert, solange wir x nicht spezifizieren. Erst durch *Belegung* von x mit einem Wert oder durch *Binden* von x mit einem *Quantor* "$\forall, \exists$" wird die Formel wahr oder falsch.

Bedeutung der Quantoren:

- "$\forall x : \varphi(x)$" bedeutet: "Für alle x gilt $\varphi(x)$".
- "$\exists x : \varphi(x)$" bedeutet: "Es existiert ein x, für das $\varphi(x)$ gilt".

Üblicherweise, wenn sich der Bereich, den die Variable x durchlaufen darf, nicht von selbst versteht, spezifiziert man noch diesen Bereich.

Beispiel:

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 \colon x > 2$$

bedeutet: "*Alle natürlichen Zahlen sind größer als 2*". (Dies ist natürlich falsch, denn 1 ist eine natürliche Zahl, die nicht größer als 2 ist.)

$$\exists x \in \mathbb{N}_0 \colon x > 2$$

bedeutet: "*Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als 2 ist*".
(Diese Aussage ist wahr, denn 3 ist eine natürliche Zahl größer als 2.)

Einige Regeln für Quantoren:

- $\neg \forall x \colon \varphi(x)$ ist gleichwertig mit $\exists x \colon \neg \varphi(x)$.

  Begründung:
  "$\Rightarrow$": Wenn $\forall x \colon \varphi(x)$ *nicht* gilt, dann muß es mindestens ein x geben, für das $\varphi(x)$ nicht gilt. Für dieses x gilt dann $\neg \varphi(x)$. Wir folgern daraus: $\exists x \colon \neg \varphi(x)$.

  "$\Leftarrow$": Es gelte $\exists x \colon \neg \varphi(x)$. Wir können also ein x wählen, für das $\varphi(x)$ nicht gilt. Demnach kann $\varphi(x)$ nicht für alle x gelten, d.h. $\neg \forall x \colon \varphi(x)$ gilt.

  $\square$

- $\neg \exists x \colon \psi(x)$ ist gleichwertig mit $\forall x \colon \neg \psi(x)$.

  Begründung: Statt dies direkt zu begründen, was analog zum vorhergehenden Beweis auch möglich wäre, wenden wir die eben bewiesene Äquivalenz

$$(\neg \forall x \colon \varphi(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \colon \neg \varphi(x)$$

an, wobei $\varphi(x)$ darin durch $\neg\psi(x)$ ersetzt wird:

$$[\neg\forall x\colon \neg\psi(x)] \;\Leftrightarrow\; \exists x\colon \neg\neg\psi(x).$$

Nun ist $\neg\neg\psi(x)$ gleichwertig mit $\psi(x)$; wir können also die doppelte Negation weglassen:

$$[\neg\forall x\colon \neg\psi(x)] \;\Leftrightarrow\; \exists x\colon \psi(x). \tag{4}$$

Weil für beliebige Aussagen A und B die Äquivalenz $\neg A \Leftrightarrow B$ den gleichen Wahrheitswert wie $A \Leftrightarrow \neg B$ hat (sozusagen "doppelte Kontraposition"), können wir die Formel (4) auch in der Form

$$[\forall x\colon \neg\psi(x)] \;\Leftrightarrow\; \neg\exists x\colon \psi(x)$$

schreiben. Die letzte Formel war zu zeigen.

$\square$

Wichtige Merkregel: Eine Aussage mit einer Quantorenfolge zu Beginn, z.B.

$$\forall x_1\; \exists x_2\; \forall x_3\; \exists x_4 : \ldots, \tag{5}$$

wird negiert, indem man die Allquantoren mit Existenzquantoren vertauscht und den aussagenlogischen "Kern" der Formel negiert. Zum Beispiel lautet das Gegenteil des Formelfragments (5):

$$\exists x_1\; \forall x_2\; \exists x_3\; \forall x_4 : \neg \ldots.$$

Man kann darin ein prädikatenlogisches Analogon zu den aussagenlogischen de-Morgan-Regeln sehen.

Logisches Schließen mit Quantoren. Typisch für die Analysis sind komplexe Kombinationen von Quantoren, z.B.

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{R}\colon (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{6}$$

Diese Aussage für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird auch die *Stetigkeit* von f genannt. Bei solchen Kombinationen verschiedener Quantoren muss man sehr genau auf ihre Reihenfolge achten.

Beispiel 1:

$$\text{“}\forall n \in \mathbb{N}_0\, \exists m \in \mathbb{N}_0\colon m > n\text{”}$$

versus

$$\text{“}\exists m \in \mathbb{N}_0\, \forall n \in \mathbb{N}_0\colon m > n\text{”}.$$

Die erste Formel besagt, daß es zu jeder natürlichen Zahl n eine größere natürliche Zahl m gibt. Das ist wahr; man nehme z.B. $m = n + 1$.
Die zweite Formel besagt, daß es eine natürliche Zahl m gibt, die größer als alle natürlichen Zahlen n ist. Das ist falsch: Gegeben $m \in \mathbb{N}_0$, können wir $n = m$ wählen; dann gilt $m > n$ jedoch nicht.
Die erste Formel behauptet also nur die Existenz “beliebig großer” natürlicher Zahlen; aber die zweite Formel behauptet die Existenz “unendlich großer” natürlicher Zahlen.

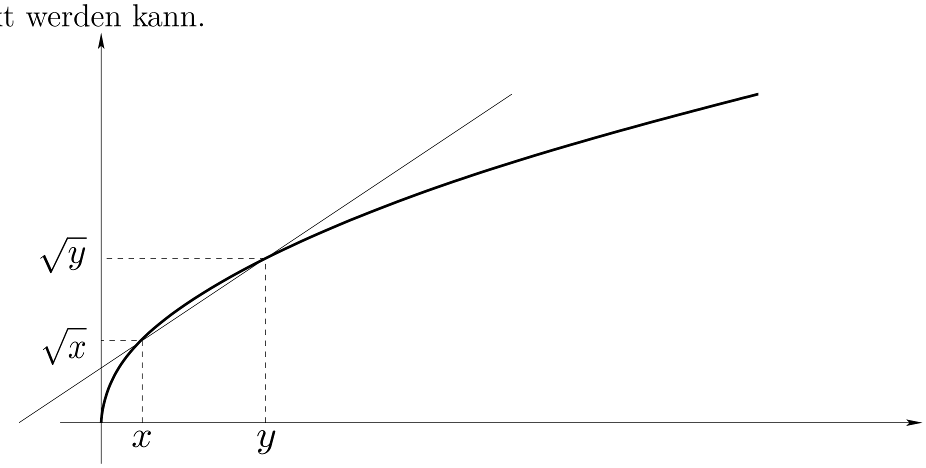
Beispiel 2:

$$\text{“}\forall x > 0\, \exists M > 0\, \forall y > 0\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|\text{”} \tag{7}$$

versus

$$\text{“}\exists M > 0\, \forall x > 0\, \forall y > 0\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|\text{”} \tag{8}$$

Die Formel (7) behauptet, daß die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, \sqrt{x})$ und $(y, \sqrt{y})$ bei *festgehaltenem* x nicht beliebig groß werden kann, also durch ein $M > 0$ beschränkt werden kann.



Formel (7) ist wahr.

Beweis: Zu zeigen ist $\forall x > 0\, \exists M > 0\, \forall y > 0\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|$.
Es sei $x > 0$ gegeben. Wir wählen $M = 1/\sqrt{x}$. Es sei nun $y > 0$ gegeben. Es gilt $\sqrt{y} \geq 0$, also $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x}$; wegen $|x-y| \geq 0$ folglich

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}} = M|x-y|.$$

Mit Hilfe von $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = x - y$ folgt hieraus die Behauptung:

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq M|x-y|.$$

□

Die Formel (8), $\exists M > 0\, \forall x > 0\, \forall y > 0\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|$, behauptet jedoch, daß die Steigung der Sekante *gleichmäßig* für alle $x > 0$ und $y > 0$ durch ein $M > 0$ beschränkt werden kann. "*Gleichmäßig*" bedeutet hier, daß M weder von x noch von y abhängen darf.
Formel (8) ist falsch. Anschaulich ist das plausibel: Wählen wir x und y beide "beliebig nahe" bei 0, so wird die Sekantensteigung "beliebig groß".
Wir beweisen nun das *Gegenteil* der Formel (8). Es wird durch "Umdrehen" der Quantoren und Negieren der Ungleichung gebildet. Wir zeigen also:

$$\forall M > 0 \quad \exists x > 0 \quad \exists y > 0\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x-y| \tag{9}$$

Beweis: Es sei $M > 0$ gegeben. Wir wählen

$$x = \frac{1}{4M^2} > 0 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{x}{4} > 0.$$

Dann gilt:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{2M} - \frac{1}{4M} = \frac{1}{4M}$$

und

$$x - y = \frac{1}{4M^2} - \frac{1}{16M^2} = \frac{3}{16M^2},$$

folglich

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{4M} > \frac{3}{16M} = M \cdot \frac{3}{16M^2} = M|x-y|,$$

also die Behauptung

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x-y|.$$

□

Zur Quantorenbehandlung in den Beweisen. Die Behandlung der Quantoren in den beiden Beweisen erfolgt genau nach der Reihenfolge der Quantoren in der zu beweisenden Formel. Um das zu sehen, analysieren wir für jeden Beweisschritt, der einen Quantor behandelt, die aktuell gegebenen Voraussetzungen und verbleibende Behauptung:

Analyse des Beweises der Formel (7):

$\boxed{\texttt{Zu zeigen:}\ \forall x > 0\, \exists M > 0\, \forall y > 0\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x - y|}$

Es sei $x > 0$ gegeben.

$\boxed{\texttt{Noch zu zeigen:}\ \exists M > 0\, \forall y > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x - y|\ \texttt{gegeben}\ x > 0.}$

Wir wählen $M = 1/\sqrt{x}$.

$\boxed{\texttt{Noch zu zeigen:}\ \forall y > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x - y|\ \texttt{gegeben}\ x > 0,\ M = 1/\sqrt{x}.}$

Es sei nun $y > 0$ gegeben.

$\boxed{\texttt{Noch zu zeigen:}\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x - y|\ \texttt{gegeben}\ x > 0,\ M = 1/\sqrt{x},\ y > 0.}$

(...) Es folgt die Behauptung:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \ldots \leq M|x - y|.$$

$\boxed{\texttt{Nichts mehr zu zeigen.}}$

Analyse des Beweises des Gegenteils (9) der Formel (8):

$\boxed{\texttt{Zu zeigen: } \forall M > 0\ \exists x > 0\ \exists y > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x - y|}$

Es sei $M > 0$ gegeben.

$\boxed{\texttt{Noch zu zeigen: } \exists x > 0\ \exists y > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x - y| \texttt{ gegeben } M > 0.}$

Wir wählen $x = \frac{1}{4M^2} > 0$.

$\boxed{\texttt{Noch zu zeigen: } \exists y > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x - y| \texttt{ gegeben } M > 0,\ x = \frac{1}{4M^2} > 0.}$

Wir wählen $y = \frac{x}{4} > 0$.

$\boxed{\texttt{Noch zu zeigen: } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x - y| \texttt{ gegeben } M > 0,\ x = \frac{1}{4M^2} > 0,\ y = \frac{x}{4} > 0.}$

(...) Folglich gilt die Behauptung

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| > M|x - y|.$$

$\boxed{\texttt{Nichts mehr zu zeigen.}}$

Abstraktion: prädikatenlogische Herleitungsregeln: Abstrahieren wir aus den Beispielen zwei prädikatenlogische Herleitungsregeln zur Behandlung der Quantoren:

Entfernung des $\forall$-Quantors aus der Behauptung:

`Zu zeigen:` $\forall x$ vom Typ $T : B(x)$ `gegeben` A

Es sei x vom Typ T gegeben.

`Noch zu zeigen:` $B(x)$ `gegeben` A, x vom Typ T.

Wenn über x im gegebenen A Annahmen gemacht wurden, muss man x mit einer neuen, noch unverbrauchten Variable umbenennen.

Entfernung des $\exists$-Quantors aus der Behauptung:

`Zu zeigen:` $\exists x$ vom Typ $T : B(x)$ `gegeben` A

Wir wählen $x = \text{Term}$.

Hierbei muss Term *den Typ T besitzen.*

`Noch zu zeigen:` $B(x)$ `gegeben` A, $x = \text{Term}$.

Auch hier darf x in der Annahme A nicht frei vorkommen; notfalls umbenennen! Alternativ, ohne Verwendung von x, kann man das verbleibende Beweisziel auch so formulieren:

`Noch zu zeigen:` $B(\text{Term})$ `gegeben` A.

Der "Term" muss beim Finden des Beweises geschickt gewählt werden. Man überlegt ihn sich am besten vorab mit Hilfe anschaulicher Überlegungen oder mit Hilfe einer Nebenrechnung, die im eigentlichen Beweis nicht mehr vorkommt.

Verwendung von gegebenen All- und Existenzaussagen. Wir besprechen nun noch zwei weitere prädikatenlogische Herleitungsregeln, mit deren Hilfe gegebene All- und Existenzaussagen angewandt werden können.
Hier ein klassisches Beispiel zur Herleitung aus einer gegebenen Allaussage:

Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Abstrahieren wir daraus eine weitere prädikatenlogische Herleitungsregel:

Entfernung des $\forall$-Quantors aus einer gegebenen Aussage:

`Zu zeigen:` Φ. `Gegeben:` A, $\forall x$ vom Typ $T:\ B(x)$.

Wir wenden die gegebene Allaussage auf $x =$ Term an.

Hierbei muss Term *den Typ T besitzen.*

`Weiterhin zu zeigen:` Φ. `Gegeben:` A, $B(\text{Term})$, $\forall x$ vom Typ $T:\ B(x)$.

Bei diesem Schluss kommt $B(\text{Term})$ als neu gegebene Aussage hinzu. Die zu zeigende Behauptung Φ bleibt bei diesem Schluss unverändert. Auch die Allaussage $\forall x$ vom Typ $T:\ B(x)$ bleibt weiterhin gegeben; sie kann zum Beispiel später noch auf andere Terme angewandt werden.

Die folgende Herleitungsregel beschreibt, wie man *gegebene* Existenzaussagen verwenden kann:

Entfernung des $\exists$-Quantors aus einer gegebenen Aussage:

`Zu zeigen:` Φ. `Gegeben:` A, $\exists x$ vom Typ $T:\ B(x)$.

Wir nehmen so ein x vom Typ T und nennen es y.

Hierbei muss y eine neue, noch nicht frei vorkommende Variable sein.

`Weiterhin zu zeigen:` Φ. `Gegeben:` A, y vom Typ T, $B(y)$.

Kommentare dazu:

- Die zu zeigende Behauptung Φ ändert sich bei diesem Schluss nicht.
- Natürlich bleibt die Existenzaussage $\exists x$ vom Typ $T:\ B(x)$ bei der Einführung von y auch weiterhin gegeben, doch ist es nun nicht mehr nützlich, sie noch bei den gegebenen Aussagen aufzulisten, weil sie nicht mehr Information enthält, als schon in der Aussage $B(y)$ mit der neuen freien Variablen y vom Typ T steht.
- Die Umbenennung der *gebundenen* Variable x in die *freie* Variable y kann zweckmäßig sein, wenn man die Bezeichnung x später noch für eine andere *freie* Variable mit einer anderen Bedeutung zur Verfügung haben will. Dieser Fall tritt recht häufig auf, doch in einfachen Fällen kann man auch auf die Umbenennung verzichten.

Ein typisches Beweisfragment aus der Analysis. Zur Illustration der Verwendung der beiden Herleitungsregeln zur Entfernung von Quantoren aus *gegebenen* Aussagen wird hier ein typisches Beweisfragment in der Analysis dargestellt:

Gegeben seien $\epsilon > 0$ *und eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen mit*

$$\forall\tilde{\epsilon} > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m :\ |a_n| < \tilde{\epsilon}.$$

Wir wenden diese Aussage auf $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2}$ *an und erhalten*

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m :\ |a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir nehmen so ein m *und nennen es* k*. Damit wissen wir* $k \in \mathbb{N}$ *und*

$$\forall n > k :\ |a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kommentar: Um Verwechslungen der *freien* Variable ϵ mit der durch den Allquantor *gebundenen* Variable $\tilde{\epsilon}$ zu vermeiden, wurden hier verschiedene Variablennamen gewählt. Die Verwendung der gleichen Bezeichnung für freie und gebundene Variablen kann manchmal zu Missverständnissen führen.

Ausblick. Die vier hier besprochenen prädikatenlogischen Herleitungsregeln "$\forall$-Entfernung und $\exists$-Entfernung aus der Behauptung und aus gegebenen Aussagen" reichen zusammen mit den aussagenlogischen Herleitungsregeln aus, um alle Aussagen über Objekte, die in allen "Modellen" inhaltlich gültig sind, auch formal herzuleiten. Eine Präzisierung dieser Aussage ist der berühmte *Gödelsche Vollständigkeitssatz* der mathematischen Logik, nicht zu verwechseln mit den noch berühmteren *Gödelschen Unvollständigkeitssätzen*.