München, 14.09.12

Bericht

Der Titel meiner Arbeit lautet „Gaußsche rationale Punkte auf einer singulären del Pezzo-Fläche“. Dabei ist die del Pezzo-Fläche beschrieben durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_0x_2 - x_1^2 &= 0 \\ x_0x_3 - x_1x_4 &= 0 \\ x_2x_4 - x_1x_3 &= 0 \\ x_1x_2 + x_4^2 + x_0x_5 &= 0 \\ x_2^2 + x_3x_4 + x_1x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Genauer geht es um gaußsche rationale Punkte auf dieser Fläche, d. h. Lösungen dieser Gleichungen in den gaußschen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}[i]$. Als zusätzliche Bedingung wird gefordert, dass diese Punkte nur von beschränkter Höhe B sind ($B \in \mathbb{N}$). Das bedeutet für eine Lösung $\underline{x} = (x_0 : x_1 : \ldots : x_5) \in \mathbb{P}^5(\mathbb{Q}[i])$ gilt:

$$\|\underline{x}\| = \max_i \{\|x_i\|\} \leq B$$

Ein erster Schritt besteht darin, nur die Lösungen in $\mathbb{Z}[i]^6_{\neq 0}$ zu betrachten. Hintergrund dafür ist, dass in $\mathbb{P}^5(\mathbb{Q}[i])$ für jedes $(x_0 : x_1 \ldots : x_5)$ ein eindeutiger Repräsentanten $(x_0, x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}[i]^6_{\neq 0}$ existiert, für den gilt: $\gcd(x_0, x_1, \ldots, x_5) = 1$.

Nach kurzer Betrachtung erkennt man, dass, wenn alle x_i bis auf x_3 und x_5 gleich 0 sind, dies Lösungen dieser Gleichungen sind. Bezeichnen wir die Anzahl dieser Lösungen mit $N_{\mathbb{P},\|\cdot\|}(B)$ dann gilt:

$$N_{\mathbb{P},\|\cdot\|}(B) \ll B^2$$

Das liegt daran, dass es ungefähr B verschiedene Punkte in $\mathbb{Z}[i]_{\neq 0}$ gibt, welche die Höhenbedingung erfüllen und da sowohl für x_3 als auch für x_5 ungefähr B Möglichkeiten zur Verfügung stehen, erhält man B^2 Möglichkeiten für die Gesamtzahl.

Nimmt man nun diese Gerade, also die Punkte $(0 : 0 : 0 : x_3 : 0 : x_5) \in \mathbb{P}^5(\mathbb{Q}[i])$ aus der Lösungsmenge heraus und bezeichnet die übrigen Lösungen mir beschränkter Höhe mit $N_{U,H}(B)$, dann existiert über $\mathbb{P}^5(\mathbb{Q})$ für bestimmte Flächen, wie sie auch durch obige Gleichungen beschrieben wird, eine Vermutung von Batyrev und Manin. Sie besagt vereinfacht für diesen Fall:

$$N_{U,H}(B) = C \cdot B(\log B)^4 + o(B(\log B)^4)$$

Das Ziel meiner Arbeit ist nun, diese Vermutung im konkreten Fall für obige Fläche über den gaußschen rationalen Zahlen nachzuprüfen bzw. teilweise zu bestätigen. Dabei gibt es verschiedene Techniken.

Bei der, die ich verwende gibt es im Wesentlichen zwei Schritte:

1. Schritt: Die vorhandenen Gleichungen werden auf eine einzige Gleichung reduziert.

2. Schritt: Von dieser einen Gleichung werden die Lösungen gezählt.

Beim 1. Schritt, der Reduktion auf eine Gleichung, entstehen zum Einen zusätzliche Variablen. Zum Anderen entstehen sowohl aus der Höhenbedingung $\|x_j\| \leq B$ als auch aus der Koprimalitätsbedingung $\gcd(x_0, \ldots, x_5) = 1$ weitere, teilweise nicht einfach zu handhabende, Bedingungen.

Beim 2. Schritt werden dann nacheinander die Lösungen gezählt. Dabei lässt man alle Variablen bis auf eine konstant und summiert die Lösungen auf. Schwierigkeiten machen dabei nicht nur die im 1. Schritt erwähnten Zusatzbedingungen, sondern überhaupt die Anzahl der Lösungen von quadratischen und kubischen Gleichungen über $\mathbb{Z}[i]$.

Förderung durch das Lehre@LMU - Projekt

Allgemein ist das Zählen rationaler Punkte mit beschränkter Höhe auf Flächen ein vergleichsweise neues Gebiet der Zahlentheorie. Auch deshalb ist dieses Problem über dem Zahlkörper $\mathbb{Q}[i]$ noch relativ unerforscht. Mit meiner Abschlussarbeit versuche ich tiefer in diese Materie einzusteigen.

Durch das Lehre@LMU - Projekt wurde die Beschaffung des Buches „Quatitativ Arithmetic of Projective Varieties“ von Timothy D. Browning, finanziert. Dieses Buch verschafft einen guten Überblick über verschiedene Methoden zur Behandlung des genannten Problems und hilft beim tieferen Verständnis der Zusammenhänge.

Wolfgang Zehentner