

Algebra

Übungsblatt 9

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
16.12.2019

Aufgabe 1. Sei K ein Körper.

Zeige: Jede endliche Untergruppe von K^* ist zyklisch.

Hinweis: Benutze den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl. Beschreibe bis auf Isomorphismus alle abelschen Gruppen mit p^3 Elementen.

Aufgabe 3. Seien K ein Körper, $a \in K$ und $P(X) \in K[X]$.

Zeige: $(X - a)^2$ teilt $P(X)$ genau dann wenn $P(a) = 0$ und $P'(a) = 0$.

Aufgabe 4. Sei $A \neq 0$ ein kommutativer Ring und $\varphi : A^n \rightarrow A^k$ ein Isomorphismus von A -Moduln.

1) Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal in A .

Zeige: φ induziert einen Isomorphismus $\mathfrak{m}^n \rightarrow \mathfrak{m}^k$ der A -Untermoduln von A^n und A^k .

2) Folgere, dass $n = k$.

Hinweis: Betrachte die Faktormoduln.