Algebra

Übungsblatt 7

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
02.12.2019

Aufgabe 1. Sei R ein endlicher Integritätsring.
Zeige: R ist ein Körper.

Aufgabe 2. Seien R ein kommutativer Ring, $u \in R^*$ und $x \in R$ mit $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Ein solches Element x heißt nilpotent).
Zeige: $u + x \in R^*$.
Hinweis: Reduziere auf den Fall $u = 1$ und benutze die Formel $(1-x)\sum_{i=0}^{m-1} x^i = 1 - x^m$.

Aufgabe 3. Sei $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein Ring. Zeige, dass der kanonischen Gruppenhomomorphismus $R^* \to R[X]^*$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4.* Seien p eine ungerade Primzahl und $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.
Zeige: $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}, +)$.
Hinweis: Betrachte den kanonischen Gruppenhomomorphismus
$f : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und zeige, dass $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times \operatorname{Ker} f$. Zeige danach, dass $\operatorname{Ker} f$ eine zyklische Gruppe mit Erzeuger $1 + p$ ist.