

# Algebra

## Übungsblatt 5

Prof. Dr. Fabien Morel  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020  
18.11.2019

---

**Aufgabe 1.** Seien  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = p^2$ .  
Zeige:  $G$  ist abelsch.

**Aufgabe 2.** Seien  $p$  eine Primzahl und  $\mathbb{F}_p$  ein Körper mit  $p$  Elementen.  
Zeige:

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i).$$

*Hinweis:* Benutze die Induktion nach  $n$  und Aufgabe 2, Übungsblatt 4.

**Aufgabe 3.** Sei  $p$  eine Primzahl und  $x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  ein Element der Ordnung  $p$ .  
Zeige:  $x$  ist konjugiert zu einer Matrix der Form  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $a \in \mathbb{F}_p$ .  
Finde ferner die Anzahl der  $p$ -Sylowuntergruppen in  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $G$  eine endliche Gruppe,  $H \subset G$  eine normale Untergruppe, und  $P$  eine  $p$ -Sylowuntergruppe von  $H$ .

Zeige:  $G = H \cdot N_G(P)$ , wobei  $N_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$  den Normalisator von  $P$  bezeichnet.

*Hinweis:* Zeige zunächst, dass für alle  $g \in G$  die Gruppe  $gPg^{-1}$  auch eine  $p$ -Sylowuntergruppe von  $H$  ist.