Algebra

Übungsblatt 2

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
28.10.2017

Aufgabe 1. Seien G eine Gruppe und $\varphi, \psi : G \to G$ zwei Abbildungen, sodass $\varphi(g) = g^2$ und $\psi(g) = g^{-1}$ für alle $g \in G$.
(1) Zeige: φ ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn G abelsch ist.
(2) Zeige: ψ ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 2. Beweise $(\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ als Gruppen.
Hinweis: Sei $\varphi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ ein Isomorphismus. Betrachte $\varphi(-1) + \varphi(-1)$.

Aufgabe 3. Sei $\varphi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus.
(1) Zeige: $\varphi(r) = r\varphi(1)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}$.
(2) Folgere aus (1), dass φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\varphi(1) \neq 0$.
(3) Zeige: $(\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{Q}, +)$ als Gruppen.
Hinweis: Sei $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ ein Isomorphismus. Betrachte die Beschränkung von ψ auf $\mathbb{Q}$ und verwende (2).

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe mit $|\, G \,| > 2$.
Zeige: $\operatorname{Aut} G \neq 1$.
Hinweis: Unterscheide folgende Fälle:
(a) G ist nicht abelsch.
(b) G ist abelsch und hat ein Element mit Ordnung > 2.
(c) G ist abelsch und hat kein Element mit Ordnung > 2.