Algebra

Übungsblatt 13

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
27.01.2020

Aufgabe 1. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.
(1) Zeige: $L = \mathbb{Q}[j, \sqrt[3]{2}]$, wobei $j = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$.
(2) Zeige: $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

Aufgabe 2. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$.
(1) Zeige: $L = \mathbb{Q}[i, \sqrt[4]{2}]$.
(2) Zeige: $[L : \mathbb{Q}] = 8$.

Aufgabe 3. Sei p eine ungerade Primzahl und $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$.
(1) Zeige: $[\mathbb{Q}[\zeta_p] : \mathbb{Q}] = p - 1$. *Hinweis:* Benutze die Aufgabe 3, Übungsblatt 11.
(2) Zeige, dass $\cos \frac{2\pi}{p} \in \mathbb{Q}[\zeta_p]$, und folgere, dass $\mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{p}] \subset \mathbb{Q}[\zeta_p]$.
(3) Finde den Grad von $\cos \frac{2\pi}{p}$ über $\mathbb{Q}$.
(4) Finde das Minimalpolynom von $\cos \frac{2\pi}{5}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4.* (1) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.
Zeige: Es existiert ein irreduzibles Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.
Hinweis: Sei K ein Körper mit p^n Elementen. Es folgt aus der Aufgabe 1, Übungsblatt 9, dass K^* eine zyklische Gruppe ist. Sei g ein Erzeuger von K^*. Betrachte das Minimalpolynom von g über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(2) Zeige: Für jede $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, existiert es ein irreduzibles Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}[X]$.