

# Algebra

## Übungsblatt 12

Prof. Dr. Fabien Morel  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020  
20.01.2020

---

**Aufgabe 1.** Sei  $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ .

- (1) Zeige:  $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 3$ .
- (2) Sei  $\beta = \alpha^2 + \alpha \in \mathbb{Q}[\alpha]$ . Zeige: Der Grad von  $\beta$  über  $\mathbb{Q}$  ist 3.
- (3) Finde das Minimalpolynom von  $\beta$  über  $\mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 2.** (1) Zeige:  $X^4 - 2$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$ .

*Hinweis:* Benutze das Eisensteinkriterium.

- (2) Finde den Grad von  $\alpha = \sqrt[4]{2}$  über  $\mathbb{Q}$ .
- (3) Finde den Grad von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .
- (4) Finde den Grad von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ .

**Aufgabe 3.** (1) Zeige:  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}] = 4$ .

- (2) Folgere, dass der Grad von  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  über  $\mathbb{Q}$  gleich 4 ist.
- (3) Finde das Minimalpolynom von  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  über  $\mathbb{Q}$ .