Algebra

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich WiSe 2019/2020
13.01.2020

Aufgabe 1. (1) Zeige: $X^4 + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.
(2) Zeige: $X^5 - X^4 - X^2 + 2X - 3$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
Hinweis: Betrachte die Reduktion modulo 2 durch den Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 2. (Eisensteinkriterium) Sei p eine Primzahl.
Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, sodass $p \mid a_i$ für $0 \leq i \leq n-1$ und $p^2 \nmid a_0$.
Zeige: $P(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.
Hinweis: Betrachte die Reduktion von $P(X)$ modulo p.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl.
Zeige: $X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 4.* Sei p eine Primzahl. Seien K ein Körper, $a \in K^*$ und $a \notin K^{*p}$, wobei $K^{*p} = \{y^p \mid y \in K^*\}$.
Zeige: $X^p - a$ ist irreduzibel in $K[X]$.
Hinweis: Sei Q ein irreduzibler Teiler von $X^p - a$. Betrachte die Multiplikation mit X in $K[X]/Q$ als K-lineare Abbildung und betrachte die Determinante dieser Abbildung.