Algebra

Übungsblatt 1

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
21.10.2017

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe. Angenommen, für jedes $x \in G$ gilt $x^2 = e$, wobei e das neutrale Element von G ist. Zeige: G ist eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 2. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Untermengen von M. Zeige: $\mathcal{P}(M)$ ist eine abelsche Gruppe mit Operation

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)\,,$$

wobei $X, Y \in \mathcal{P}(M)$.

Aufgabe 3. Sei $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ eine Gruppe mit 8 Elementen, wobei 1 das neutrale Element ist und es gilt:
$i^2 = j^2 = -1, ij = -ji = k, (-1)^2 = 1, (-1)a = a(-1) = -a$ für alle $a \in \{i, j, k\}$ (Q heißt Quaternionengruppe).
a) Berechne k^2, ik, ki, jk, kj, ijk.
b) Finde explizit alle Untergruppen von Q. Bitte begründen Sie Ihre Lösung.
Hinweis: Q hat genau 6 Untergruppen.

Aufgabe 4. (1) Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G, wobei

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}\,.$$

Zeige: $Z(G)$ ist eine abelsche Untergruppe von G.
(2) Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $Z(\mathrm{GL}_n(K)) = \{aE_n \in \mathrm{GL}_n(K) \,|\, a \in K^*\}$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist.