Algebra

Tutoriumsblatt 7

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
05.12.2019

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
(1) Zeige: $\mathbb{Z}[i]$ ist ein Ring.
(2) Beschreibe $\mathbb{Z}[i]^*$.
Hinweis: Benutze die komplexe Norm.

Aufgabe 2. Ein Boolescher Ring R ist ein Ring, in dem $x^2 = x$ für alle x aus R gilt. Zeige:
(1) Es gilt $2x = 0$ für alle $x \in R$.
(2) R ist kommutativ.
(3) Jedes endlich erzeugte Ideal von R ist ein Hauptideal.

Aufgabe 3. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Untermengen von M.
(1) Zeige: $\mathcal{P}(M)$ ist ein Boolescher Ring mit Operationen

$$X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) \text{ und } X \cap Y\,,$$

wobei $X, Y \in \mathcal{P}(M)$.
(2) Zeige: $\mathcal{P}(M) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^M$ als Ringe.

Aufgabe 4. Sei R ein assoziativer (nicht kommutativer) Ring. Seien $x, y \in R$ mit $1 - xy \in R^*$. Zeige mit Hilfe der Taylor-Entwicklung, dass $1 - yx \in R^*$.