Algebra

Tutoriumsblatt 5

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
21.11.2019

Aufgabe 1. Seien G eine Gruppe und $G^{\text{ab}} := G/[G,G]$, wobei $[G,G]$ die Kommutatorgruppe von G ist. Sei $p : G \to G^{\text{ab}}$, $x \mapsto x[G,G]$, der kanonische Gruppenhomomorphismus.

Zeige die universelle Eigenschaft von G^{ab}: für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ mit einer abelschen Gruppe H existiert es ein einziger Gruppenhomomorphismus $\psi : G^{\text{ab}} \to H$, sodass $\varphi = \psi \circ p$.

Aufgabe 2. (1) Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = pq$ mit Primzahlen $p < q$. Es gelte $p \nmid (q-1)$.
Zeige: G ist zyklisch.
(2) Folgere aus (1), dass jede Gruppe mit 15 Elementen zyklisch ist.

Aufgabe 3. (1) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 12$.
Zeige: G enthält eine Sylowuntergruppe, die in G normal ist.
(2) Seien $A_4 := \{\sigma \in S_4 \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$ die alternierende Gruppe und
$H = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \subset A_4$.
Zeige: H ist eine normale Untergruppe von A_4.

Aufgabe 4. Seien G eine Gruppe und N eine normale Untergruppe von G.
(1) Sei S eine normale Untergruppe von N. Ist S normal in G? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Betrachte $G = A_4$, $N = H$ wie in der Aufgabe 3.2.
(2) Gleiche Frage, wenn S eine normale Sylowuntergruppe von N ist.