

# Algebra

## Tutoriumsblatt 4

Prof. Dr. Fabien Morel  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020  
14.11.2019

**Aufgabe 1.** Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $N, M \subset G$  normale Untergruppen.  
(1) Aus Aufgabe 2.2 (Übungsblatt 3) wissen wir, dass

$$NM := \{nm \mid n \in N, m \in M\}$$

eine Untergruppe von  $G$  ist.

Zeige:  $NM$  ist normal in  $G$ .

(2) Angenommen,  $N \cap M = 1$ .

Zeige: Für alle  $n \in N$  und  $m \in M$  gilt  $nm = mn$ .

*Hinweis:* Betrachte den Kommutator  $[n, m] := nmn^{-1}m^{-1}$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $G$  eine endliche Gruppe und  $\alpha \in \text{Aut}(G)$ . Angenommen, dass

$$|\{g \in G \mid \alpha(g) = g\}| > \frac{|G|}{2}.$$

Zeige:  $\alpha = \text{id}_G$ .

**Aufgabe 3.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma \in S_n$  eine Permutation und  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Die Gruppe  $\mathbb{Z}$  operiert auf  $X$  durch  $n.x = \sigma^n(x)$ , wobei  $n \in \mathbb{Z}$  und  $x \in X$ .

Seien  $X_1, \dots, X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , die Bahnen dieser Operation mit  $|X_i| = n_i$ . Definiere die folgenden Permutationen  $\sigma_i \in S_n$  für  $i = 1, \dots, k$ :

$$\forall x \in X, \sigma_i(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{wenn } x \in X_i; \\ x, & \text{wenn } x \in X \setminus X_i. \end{cases}$$

(die Permutation  $\sigma_i$  ist wohl-definiert, da  $\sigma(X_i) = X_i$ ).

(1) Zeige:  $\sigma_i$  ist ein  $n_i$ -Zyklus für alle  $i = 1, \dots, k$  und  $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$  für alle  $i, j$ .

(2) Zeige:  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$ .

(3) Folgere, dass jede Permutation aus  $S_n$  ein Produkt von paarweise disjunkten Zyklen ist.

**Aufgabe 4.** Seien  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe. Angenommen, dass der Index von  $H$  gleich dem kleinsten Primteiler von  $|G|$  ist.

Zeige:  $H$  ist eine normale Untergruppe von  $G$ .

*Hinweis:* Betrachte die Operation von  $H$  auf  $G/H$  durch  $h.(gH) = hgH$ , wobei  $h \in H$ ,  $g \in G$ .

*Bemerkung:* Ein Spezialfall dieser Aufgabe ist Aufgabe 1, Übungsblatt 3.