Algebra

Tutoriumsblatt 3

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
07.11.2019

Aufgabe 1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Zeige: (1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Aufgabe 2. Seien G und G' zwei Gruppen und $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G.
(1) Zeige: $f(H)$ ist eine Untergruppe von G'.
(2) Angenommen, dass $|H|$ und $|G'|$ endlich und teilerfremd sind.
Zeige: $H \subset \operatorname{Ker} f$.

Aufgabe 3. Seien G eine Gruppe und $H \subset G$ eine normale Untergruppe mit n Elementen und Index m (d.h. $|H| = n$, $|G/H| = m$). Angenommen, dass n und m teilerfremd sind.
Zeige: H ist die einzige Untergruppe von Index m in G.
Hinweis: Verwende Aufgabe 2.2.

Aufgabe 4. (1) Seien G eine Gruppe und $H \subset G$ eine normale Untergruppe vom Index m. Zeige: $g^m \in H$ für jedes $g \in G$.
(2) Sei H eine Untergruppe von endlichem Index in $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Zeige: $H = \mathbb{C}^*$.