Algebra

Tutoriumsblatt 2

Prof. Dr. Fabien Morel — WiSe 2019/2020
Dr. Maksim Zhykhovich — 31.10.2017

Aufgabe 1. Sei

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Zeige: H ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
(2) $H \simeq (\mathbb{R}, +)$ als Gruppen.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit $|G|$ gerade.
Zeige: G enthält ein Element der Ordnung 2.
Hinweis: Betrache folgende Menge $U_g = \{g, g^{-1}\}$, wobei $g \in G$. Zeige, dass für $g, h \in G$ die Mengen U_g und U_h entweder gleich oder disjunkt sind.

Aufgabe 3. (1) Seien m, n zwei positive ganze Zahlen, die teilerfremd sind.
Sei $f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus.
Zeige: f ist trivial (d.h. $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
(2) Beschreibe alle Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 4. (1) Sei p eine Primzahl und $f : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus.
Zeige: f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $f(1) \neq 0$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(2) Zeige: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.