

Algebra

Tutoriumsblatt 13

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
30.01.2020

Aufgabe 1. Seien $P(X) = X^4 + aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom und $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $P(X)$ über \mathbb{Q} .
Zeige: $[L : \mathbb{Q}] = 4$ oder 8 .

Aufgabe 2. (1) Zeige: $P(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ ist das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ über \mathbb{Q} .

(2) Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $P(X)$ über \mathbb{Q} .

Zeige: $L = \mathbb{Q}[\alpha]$.

Hinweis: Finde alle Nullstellen von $P(X)$ in \mathbb{C} und bemerke, dass

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(3) Folgere, dass $[L : \mathbb{Q}] = 4$.

Aufgabe 3. (1) Zeige: $P(X) = X^4 - 6X^2 + 6$ ist das Minimalpolynom von $\beta = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$ über \mathbb{Q} .

(2) Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $P(X)$ über \mathbb{Q} .

Zeige: $L = \mathbb{Q}[\beta, \sqrt{2}]$.

(3) Folgere, dass $[L : \mathbb{Q}] = 8$.

Hinweis: Zeige, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[\beta]$.