Algebra

Übungsblatt 9

Prof. Dr. Markus Land	WiSe 2022/2023
Dr. Maksim Zhykhovich	19.12.2022

Aufgabe 1. Sei L/K eine Galoiserweiterung mit $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq S_n$.
Zeige: Es gibt genau einen Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ mit $|E : K| = 2$ und E/K ist Galois.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl, $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^{*p}$ und L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - a$ über $\mathbb{Q}$. Zeige:
(1) Die Menge $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ausgestattet mit der Verknüpfung $(m, k) \cdot (m', k') := (m + km', kk')$ ist eine Gruppe, geschrieben $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
(2) Die Galois Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 3, Übungsblatt 7.

Aufgabe 3. Seien K ein Körper mit $\mathrm{char}\, K \neq 2$ und $f \in K[X]$ ein separables Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in einem algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K. Wie immer fassen wir G als Untergruppe von S_n auf. Die Diskriminante von f ist wie folgt gegeben: $\mathrm{disc}(f) = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)^2$ in $\bar{K}$.
Zeige:
(1) $\mathrm{disc}(f) \in K$.
(2) G ist eine Untergruppe von A_n genau dann wenn $\mathrm{disc}(f)$ ein Quadrat in K ist.
Hinweis: Betrachte die Wirkung der Galoisgruppe auf $\prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$.

Aufgabe 4. Berechne die Galoisgruppen der Zerfällungskörper folgender Polynome über $\mathbb{Q}$:
a) $X^3 - 4X + 2$
b) $X^3 - 3X + 1$
Hinweis: Benutze Aufgabe 3 und die Formel $\mathrm{disc}(X^3 + aX + b) = -4a^3 - 27b^2$.

Aufgabe 5. Sei p eine Primzahl, $n \geq 1$ und φ die Eulersche φ-Funktion. Zeige:
(1) $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$, und
(2) $n = \sum\limits_{d|n, d\geq 1} \varphi(d)$.