Algebra

Übungsblatt 8

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
12.12.2022

Aufgabe 1. Zeige: Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ von $\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung und $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
Hinweis: $\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl und sei $G \subseteq S_p$ eine Untergruppe deren eingeschränkte Wirkung auf $\{1, 2, \ldots, p\}$ transitiv ist und welche eine Transposition enthält. In dieser Aufgabe zeigen wir: $G = S_p$.
(1) Zeige, dass für $a, b \in \{1, 2, \ldots, p\}$ die Regel $a \sim b$ genau dann wenn die Transposition (a, b) ein Element von G ist, eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{1, 2, \ldots, p\}$ definiert.
(2) Zeige, dass je zwei Äquivalenzklassen dieselbe Kardinalität haben, und dass diese Kardinalität daher ein Teiler von p ist.
(3) Schließe, dass je zwei Elemente in $\{1, 2, \ldots, p\}$ äquivalent sind, und daher G alle Transpositionen enthält.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl. Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad p. Angenommen, dass f genau $p-2$ Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat. Sei $L(f) \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.
Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L(f)/\mathbb{Q})$ wirkt auf den Nullstellen von f in $L(f)$ und kann dadurch mit einer Untergruppe von S_p identifiziert werden.
Zeige:
(1) Komplexe Konjugation induziert eine Transposition in $\mathrm{Gal}(L(f)/\mathbb{Q})$.
(2) Folgere aus Aufgabe 2 dass $\mathrm{Gal}(L(f)/\mathbb{Q}) \cong S_p$.
(3) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L(x^5 - 4x + 2)/\mathbb{Q})$ ist isomorph zu S_5.

Aufgabe 4. Bestimme die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers des Polynoms $x^4 - 2$ über $\mathbb{F}_5$.