be 1

ei $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\alpha^2 = 2+\sqrt{2}$ und $\alpha^2 - 2 = \sqrt{2} \Rightarrow (\alpha^2-2)^2 = 2$

gt, dass α eine Nullstelle von folgendem Polynom:

$$f(x) = (x^2-2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$$

Eisenstein ist $f(x)$ irreduzibel $(p=2)$.

$|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = 4$.

haben: $f(x) = (x^2-2)^2 - 2 = (x^2-2-\sqrt{2})(x^2-2+\sqrt{2}) =$

$$= (x-\sqrt{2+\sqrt{2}})(x+\sqrt{2+\sqrt{2}})(x-\sqrt{2-\sqrt{2}})(x+\sqrt{2-\sqrt{2}})$$

llstellen von f sind: $\pm\alpha, \pm\beta$, wobei $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$\mathbb{Q}(\alpha)$, $2+\sqrt{2} = \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

dem Hinweis $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

lgt, dass alle Nullstellen von f in $\mathbb{Q}(\alpha)$ liegen.

$\mathbb{Q}(\alpha)$ ist von Nullstellen über $\mathbb{Q}$ erzeugt.

ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} \text{ ist normal } \underset{\text{char } \mathbb{Q} = 0}{\Longrightarrow} \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} \text{ ist Galoisch}$$

haben auch $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})| = |\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = 4$

~~Gal / Q~~ $\qquad L = \mathbb{Q}(\alpha)$

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/4$ oder $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

f irred $\Rightarrow$ $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ wirkt transitiv auf $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$

$\Rightarrow \exists\ \sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$

Es ist genug zu zeigen $\sigma^2(\alpha) \neq \alpha$ (dann $\sigma^2 \neq id$, ord $\sigma > 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/4$)

Angenommen, dass $\sigma^2(\alpha) = \alpha$ (d.h. $\sigma(\beta) = \alpha$)

$\alpha\beta = \sqrt{2} \Rightarrow \sigma(\sqrt{2}) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \beta\alpha = \sqrt{2}$

$\alpha^2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow 2 + \sqrt{2} = \sigma(2+\sqrt{2}) = \sigma(\alpha^2) = \beta^2 = 2 - \sqrt{2}$ ↯.

Aufgabe 2

Erinnerung: Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $(i_1, \dots, i_k)$ ein k-Zyklus $\in S_n$ und $\sigma \in S_n$.

Dann $$\sigma\,(i_1, \dots, i_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$$

auch k-Zyklus.

① $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow$
1) $a \sim a$, $\forall a \in \{1, \dots, p\}$
2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3) $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

1) $(a,a) = id \in G$ 2) $(a,b) = (b,a)$

3) Angenommen, $\underset{a \sim b}{(a,b) \in G}$ und $\underset{b \sim c}{(b,c) \in G}$ (und ~~$c \neq a$~~ a, b, c verschieden)

Dann $(a,c) = \underset{\sigma}{(b,c)}\,(a,b)\,\underset{\sigma^{-1}}{(b\,c)^{-1}} \in G \Rightarrow a \sim c$

Es folgt dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und $\{1,2,\dots,p\}$ = disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen bzg. $\sim$

② Seien U_1, U_2 zwei Äquivalenzklasse und $a \in U_1$, $b \in U_2$.
Die Wirkung von G auf $\{1,2,\dots,p\}$ ist transitive
$\Rightarrow \exists\, \sigma \in G$ mit $\sigma(a) = b$

$\forall a' \in \{1,2,\dots,p\}$ gilt: $\sigma(a,a')\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(a')) = (b, \sigma(a'))$

$\Rightarrow a \in U_1 \Leftrightarrow \sigma(a') \in U_2$

Es folgt dass die Beschränkung von σ auf U_1 eine Bijektion $\sigma : U_1 \to U_2$ definiert. $\Rightarrow$ alle Äquivalenzklassen haben die gleiche Kardinalität m und $m \mid p$ ③ ~~$m \geq 2 \Rightarrow m = p$~~

(3) eine Transposition $\in G \Rightarrow m \geq 2 \Rightarrow m = p \Rightarrow$

$\forall i,j \in \{1, 2, ..., p\}$ gilt $i \sim j \Leftrightarrow (i,j) \in G$

Es folgt: $G = S_p$

Aufgabe 3

1) $L := L(f)$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\tau", "\text{Komplexe Konjugation}"'] & \mathbb{C} \\ L \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \tau(L) = L \arrow[u, phantom, "\cup"] \\ \mathbb{Q} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, phantom, "\cup"] & \end{tikzcd}$$

$\tau(L) = L$, da L normal ist

$\tau_{|L} \in Gal(L/\mathbb{Q})$ permutiert zwei Kompexe Nullstelle von f in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\tau_{|L} \in Gal(L/\mathbb{Q}) \subset S_p$ ist eine Transposition.

2) ~~Nach~~ f irreduzibel $\overset{}{\underset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow}}$ $Gal(L/\mathbb{Q})$ wirkt transitiv auf den Nullstellen von f in $\mathbb{C}$.

Es folgt aus Aufgabe 2 : $Gal(L/\mathbb{Q}) \simeq S_p$.

3) $f = X^5 - 4X + 2$ ist irreduzibel $/\mathbb{Q}$ (Eisenstein für $p=2$) und hat genau 3 reelle Nullstelle

Es folgt aus (2) : $Gal(L(f)/\mathbb{Q}) \simeq S_5$.

Aufgabe 4

Falls $f = X^4 - 2$ ~~ist~~ irreduzibel ist, ist

$L := \mathbb{F}_5[X]/(f) \simeq \mathbb{F}_{5^4}$ der ZK von $f/\mathbb{F}_5$

(da $L/\mathbb{F}_5$ Galois ist und f eine NS in L hat).

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_5) = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{5^4}/\mathbb{F}_5) \underset{\text{Vorlesung}}{\simeq} \mathbb{Z}/4$$

Wir zeigen jetzt dass f irreduzibel ist.

f hat keine NS in $\mathbb{F}_5$

Falls $f = gh$ mit $\mathrm{Grad}\, h = \mathrm{Grad}\, g = 2$, dann

f hat eine NS $\alpha \in \mathbb{F}_5[x]/(g) \simeq \mathbb{F}_{25}$

Dann $0 = f(\alpha) = \alpha^4 - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^4 = 2$

und $\alpha^{24} = 1 \Rightarrow (\alpha^4)^6 = 1 \Rightarrow 2^6 = 1 \Rightarrow 64 = 1$ ↯

falsch in $\mathbb{F}_5$.