Algebra

Übungsblatt 7

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
05.12.2022

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl.
(1) Sei K ein Körper von Charakteristik p.
Zeige: Die Abbildung $\varphi : K \to K, a \mapsto a^p$, ist ein Ringhomomorphismus (der heißt Frobeniushomomorphismus).
(2) Sei $\mathbb{F}_p[t]$ der Ring von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ und $K = \mathbb{F}_p(t)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{F}_p[t]$.
Zeige: Das Polynom $X^p - t$ ist irreduzibel in $K[X]$ und nicht separabel.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl. Seien K ein Körper, $a \in K^*$ und $a \notin K^{*p}$, wobei $K^{*p} = \{y^p \mid y \in K^*\}$.
Zeige: $X^p - a$ ist irreduzibel in $K[X]$.
Hinweis: Sei Q ein irreduzibler Teiler von $X^p - a$. Betrachte die Multiplikation mit X in $K[X]/Q$ als K-lineare Abbildung und betrachte ihre Determinante.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl, $p > 2$. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - a$ über $\mathbb{Q}$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $a \notin \mathbb{Q}^{*p}$.
(1) Zeige: $L = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{a}, \zeta_p)$, wobei $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$.
(2) Finde $[L : \mathbb{Q}]$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 2 von diesem Übungsblatt und Aufgabe 4, Übungsblatt 6.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von positiver Charakteristik p und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige: Es gibt ein maximales $r \in \mathbb{N}$ sodass $f(X) = g(X^{p^r})$ für ein Polynom $g \in K[X]$ und alle Nullstellen von f haben in einem algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K Vielfachheit p^r.

Aufgabe 5. Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf M besteht aus einer Abbildung $\Phi\colon G \times M \to M$ sodass die assoziierte Abbildung

$$G \to \mathrm{Hom}(M, M), \quad g \mapsto \Phi(g, -)$$

ein Monoidhomomorphismus ist. Für $g \in G$ und $m \in M$ schreiben wir auch gm statt $\Phi(g, m)$. Eine Gruppenwirkung heisst frei, falls aus $gm = m$ folgt, dass $g = e$. Eine Gruppenwirkung heisst transitiv, falls für $m, m' \in M$ ein $g \in G$

existiert sodass $gm = m'$.
Zeige: eine Gruppenwirkung ist frei, genau dann wenn für jedes $m \in M$ die assoziierte Abbildunge $G \to M$, $g \mapsto \Phi(g, m)$ injektiv ist, und transitiv, genau dann wenn für jedes $m \in M$ die assoziierte Abbildung $g \mapsto \Phi(g, m)$ surjektiv ist.

Sei nun L/K eine Körpererweiterung und $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K welcher L enthält. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Aut}_K(L) \times \mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}) \to \mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}), \quad (\varphi, \sigma) \mapsto \sigma \circ \varphi^{-1}$$

eine Gruppenwirkung von $\mathrm{Aut}_K(L)$ auf $\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})$ definiert, welche frei und transitiv ist wenn L/K normal ist.