

# Algebra

## Übungsblatt 6

Prof. Dr. Markus Land  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023  
28.11.2022

---

**Aufgabe 1.** Sei  $L/K$  eine algebraische Körpererweiterung. Zeige: Ist  $M/L$  algebraisch und  $M/K$  normal, so existiert ein normaler Abschluss  $N/K$  mit  $L \subseteq N \subseteq M$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $L/K$  eine Körpererweiterung und  $a \in L$ , sodass der Grad  $[K(a) : K]$  ungerade ist.  
Zeige:  $K(a) = K(a^2)$  und finde ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage, wenn  $[K(a) : K]$  gerade ist.

**Aufgabe 3.** Seien  $K$  ein Körper,  $f \in K[x]$  ein Polynom von Grad  $n \geq 1$  und  $L$  ein Zerfällungskörper von  $f$  über  $K$ .  
Zeige:  $[L : K]$  teilt  $n$ !  
*Hinweis:* Benutze Induktion nach  $n$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $K$  ein Körper,  $f \in K[X]$  ein irreduzibles Polynom von Grad  $n$ . Sei  $L/K$  eine endliche Körpererweiterung mit  $m = [L : K]$  teilerfremd zu  $n$ .  
Zeige:  $f$  ist irreduzibel in  $L[X]$ .  
*Hinweis:* Sei  $h$  ein irreduzibler Teiler von  $f$  in  $L[X]$ . Betrachte die Abbildung  $K[X]/(f) \rightarrow L[X]/(h)$ .

**Aufgabe 5.** Zeige:  $x^5 - 9x^2 + 15x + 6$  ist irreduzibel über  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ .  
*Hinweis:* Benutze Aufgabe 4.