Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (ähnlich wie der Beweis von Lemma 3.25. a
L/K alg. $\Rightarrow$ $\exists$ normaler Abschluss N/K von L/K

$K \subset L \subset N \subset \bar{L}$

statt $\bar{L}$ können wir M schreiben)

Lösung:

~~Sei~~ $L = K(\{a_i\}_{i \in I})$, $a_i \in L$

$\forall i \in I$: q_i das Minimalpolynom von a_i über K.

M/K normal, $a_i \in M$ $\Rightarrow$ q_i zerfällt in $M[X]$

Sei $N = K(\{\text{alle Nullstellen von } q_i \text{ in } M\}_{i \in I}) \subseteq M$

Dann ist N ein Zerfällungskörper von $\{q_i\}_{i \in I}$ $\Rightarrow$ N/K normal

Falls $\underbrace{K \subset L \subset N'}_{\text{normal}} \subset N \subset M$, dann müssen alle NS von q_i $\forall i \in I$ in N' liegen (und dann $N' = N$).

Aufgabe 2

$a^2 \in K(a) \Rightarrow K \subset K(a^2) \subset K(a)$

$\Downarrow$ Gradformel

$$\underbrace{[K(a):K]}_{\text{ungerade}} = [K(a):K(a^2)] \cdot [K(a^2):K]$$

$[K(a):K(a^2)] =$ 1 oder 2, da a eine Nullstelle von $X^2 - a^2 \in K(a^2)[X]$ ist

$\Downarrow$

Grad (Minpolynom von a über $K(a^2)$) = 1 oder 2

$[K(a):K(a^2)] \neq 2$, da $[K(a):K]$ ungerade ist

Es folgt $[K(a):K(a^2)] = 1$ und $K(a) = K(a^2)$

- $K = \mathbb{Q}$, $a = \sqrt{2}$, $|K(a):K| = 2$ und $K(a^2) = K = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

Induktion nach $n = \text{Grad}\, f$

$n=1$ klar, $L = K$.

Sei $\text{Grad}\, f = n > 1$

<u>Fall 1</u>: f ist irreduzibel über K

Sei α eine Nullstelle von f in L.

$$\underbrace{K \subset K(\alpha)}_{n,} \overset{\overset{M}{\shortparallel}}{} \subset L \;, \qquad \text{in } M[X]: \quad f(x) = (x-\alpha)\, g(x)$$

da f irred. ist

L/M ist ein Zerfällungskörper von $g(x)$ über M. und $\text{Grad}\, g = n-1 < n$

Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ $[L:M] \mid (\text{Grag}\, g)! = (n-1)!$

Dann $[L:K] = [K(\alpha):K] \cdot [L:M] = n \cdot [L:M] \mid n(n-1)! = n!$

<u>Fall 2</u> f ist ~~irred~~ reduzibel über K $\Rightarrow$ $f = g \cdot h$ in $K[X]$.
$n = k+m$, $\text{Grad}\, g = k$, $\text{Grad}\, h = m$

$$K \subset M := K\left(\left\{ \begin{matrix}\text{alle Nullstellen} \\ \text{von } g \text{ in } L\end{matrix} \right\}\right) \subset L = M\left(\left\{ \begin{matrix}\text{alle Nullstellen} \\ \text{von } h \text{ in } L\end{matrix} \right\}\right)$$

M ~~ist~~ ein ZK von g/K $\underset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow}$ $[M:K] \mid k!$

L ein ZK von h/M $\Longrightarrow$ $[L:M] \mid m!$

$$[L:K] = [L:M] \cdot [M:K] \mid k!\, m! \mid (m+k)! = n!$$

da $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!\,m!} \in \mathbb{Z}$

Binomialkoeffizient

Aufgabe 4

Sei h ein irreduzibler Teiler von f in $L[X]$.

Z.z.: $h = f$.

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L[X] \longrightarrow L[X]/h$$

$h \mid f$ in $L[X]$ $\Rightarrow$ $f \in \operatorname{Ker} \varphi$ $\Rightarrow$ wir haben

eine Körpererweiterung: L'/K'

$$\begin{tikzcd}
K' = K[X]/(f) \arrow[r, "m'"] & L[X]/(h) = L' \\
K \arrow[u, "\mathrm{Grad}\, f = n"] \arrow[ur] \arrow[r, "m"'] & L \arrow[u, "n' = \mathrm{Grad}\, h"']
\end{tikzcd}$$

Gradformel: $|L' : K| = n'm = nm'$

$$\Downarrow$$

$$n \mid mn'$$

$$\Downarrow \quad \mathrm{g.g.T}(n, m) = 1$$

$$n \mid n'$$

$$\Downarrow$$

$$n \leq n'$$

Aber $n' = \mathrm{Grad}\, h \leq n = \mathrm{Grad}\, f$

Es folgt: $n = n'$ & $h = f$ ist irreduzibel in $L[X]$.

Aufgabe 5

$f = X^5 - 9X^2 + 15X + 16$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

($p = 3$ Eisensteinkriterium)

$K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $|L : \mathbb{Q}| = 4$ (Aufgabe 3, Übungsblatt 5)

$\text{g.g.T.}(\underset{5}{\text{Grad} f}, \underset{4}{|L:K|}) = 1 \underset{\text{Aufgabe 4}}{\Longrightarrow}$ f ist irreduzibel über L.