

Algebra

Übungsblatt 5

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
21.11.2022

Aufgabe 1. Zeige, dass die folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ sind.

(1) $x^4 - 2x^3 + x + 3$,

(2) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

Hinweis: Betrachte die Reduktion modulo 2.

Aufgabe 2. (1) Sei $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass α algebraisch über \mathbb{Q} ist und finde den Grad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

(2) Sei $\beta = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2$.

Aufgabe 3. (1) Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$.

(2) Folgere, dass der Grad von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über \mathbb{Q} gleich 4 ist.

(3) Finde das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über \mathbb{Q} .

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl.

Zeige: $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.