Algebra

Übungsblatt 4

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
14.11.2022

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl. Zeige die folgende Gleichung in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

$$X^p - X = \prod_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (X - a)$$

und folgere, dass $(p-1)! = -1$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Seien K ein Körper, $n \geq 0$ und $a_0, ..., a_n \in K$ mit $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$. Wir definieren $V_n := \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$, dies ist ein $(n+1)$-dimensionaler K-VR mit Basis x^i für $i = 0, ..., n$.
a) Sei

$$E_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \qquad (0 \leq i \leq n).$$

Zeige: $\forall f \in V_n$ gilt $f = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) E_i$.
b) Zeige: $E_0, ..., E_n$ ist eine Basis von V_n.
c) Sei $\hat{E}_0, ..., \hat{E}_n$ die duale Basis zu $E_0, ..., E_n$.
Zeige: $\forall f \in V_n$ gilt $\hat{E}_i(f) = f(a_i)$ $(0 \leq i \leq n)$.
d) Zeige: $\forall\, b_0, ..., b_n \in K$ $\exists!$ $f \in V_n$ mit $f(a_i) = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$.

Aufgabe 3. a) Sei $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad n.
Angenommen $P(k) \in \mathbb{Z}$ für alle $k = 0, ..., n$. Zeige: P ist ein Element von $\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $P(k) \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 2.
b) Finde ein Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \mathbb{Z}[x]$ sodass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $P(k) \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K = 0$ und sei $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und f' seine formale Ableitung. Zeige:

$$f' \mid f \quad \Longleftrightarrow \quad f = a(x - x_0)^n \text{ für } a, x_0 \in K\,.$$

Aufgabe 5. Sei $P \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad 2 oder 3.
Zeige: P ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann wenn P keine Nullstelle in $\mathbb{Z}$ besitzt.