Aufgabe 1

1) $\forall a \in \mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p$ gilt $a^p = a$.

~~$X^p - X$ hat~~

$\underbrace{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}}_{p \text{ Nullstellen}}$ sind die Nullstellen von $X^p - X$

& Grad $(X^p - X) = p$.

Dann $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}$ sind alle p Nullstellen von $X^p - X$

& $X^p - X = X(X-\bar{1}) \cdot \dots \cdot (X - (\overline{p-1}))$

$\uparrow$ Hauptkoeffizient $= 1$

$$\Downarrow$$

$(*) \quad X^{p-1} - 1 = (X-\bar{1}) \cdot (X-\bar{2}) \cdot \dots \cdot (X - (\overline{p-1}))$

2) Wir vergleichen den letzten Koeffizient ~~von X~~ in $(*)$:

$p=2$ klar, Sei $p > 2$.

$$\overline{-1} = -\bar{1} \cdot -\bar{2} \cdot \dots \cdot -(\overline{p-1})$$

$$-\bar{1} = (-1)^{\overset{\text{gerade}}{(p-1)}} \overline{(p-1)!} = \overline{(p-1)!}$$

$$\Downarrow$$

$$(p-1)! = -1 \text{ in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Aufgabe 2

Bmk K Körper, $f \in K[X]$, Grad $f \leq n$

f hat $n+1$ Nullstellen $\Rightarrow f = 0$

a) Wir betrachten $g := f - \sum_{i=0}^{n} f(a_i) E_i$, Grad $g \leq n$

$\forall\ j = 0, \dots, n$: $g(a_j) = f(a_j) - \sum_{i=0}^{n} f(a_i) E_i(a_j) = f(a_j) - f(a_j) = 0$

$$E_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq j \\ 1, & \text{wenn } i = j \end{cases}$$

Es folgt aus ~~dem~~ der Bemerkung, dass $g = 0 \Rightarrow f = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) E_i$

b) Nach a) $E_0, E_1, \dots, E_n$ erzeugen V_n und $\dim V_n = n+1$

c) $\hat{E}_0, \dots, \hat{E}_n$ duale Basis von $E_0, \dots, E_n$. $\Rightarrow \hat{E}_j(E_i) = \delta_{ij}$

z.z.: $\forall\ f \in V_n$: $\hat{E}_i(f) = f(a_i)$

$$\hat{E}_i(f) \overset{a)}{=} \hat{E}_i\left(\sum_{j=0}^{n} f(a_j) E_j\right) \overset{K-\text{linear}}{=} \sum_{j=0}^{n} f(a_j)\, \hat{E}_i(E_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f(a_j)\, \delta_{ij} = f(a_i)$$

d) Wir definieren $f := \sum_{i=0}^{n} b_i E_i \in V_n$

und nach a) $f = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) E_i$ $\Bigg\}$ $\xrightarrow[\text{Basis}]{E_0, E_1, \dots, E_n}$ $f(a_i) = b_i$ $\forall\, 0 \leq i \leq n$

Eindeutigkeit von f:

Sei $\tilde{f} \in V_n$ mit $\tilde{f}(a_i) = b_i$ $\forall\ 0 \leq i \leq n$

Betrachte $g := f - \tilde{f} \in V_n$ hat $n+1$ NS $a_0, \dots, a_n \in K$

$\xRightarrow[\text{Bmk}]{} g = 0 \Rightarrow f = \tilde{f}$.

Aufgabe 3

a) Wir verwenden Aufgabe 2 für $a_0 = 0, a_1 = 1, \dots, a_n = n$

Nach Aufgabe 2.a: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(i)}_{\in \mathbb{Z}} E_i(x) \quad (*)$

$a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow E_i(x) \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow P(x) \in \mathbb{Q}[x]$

Sei $k \in \mathbb{Z}$

Setze $x = k$ in $(*)$: $P(k) = \sum_{i=0}^{n} P(i) E_i(k)$

Um zeigen dass $P(k) \in \mathbb{Z}$, ist es genug zu zeigen dass $E_i(k) \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$

Für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ $E_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \neq i \\ 1, & \text{wenn } k = i \end{cases} \in \mathbb{Z}$ ~~ok~~

Angenommen, $k > n$

$$E_i(k) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{(k-j)}{(i-j)} = \prod_{0 \le j \le i-1} (\ ) \cdot \prod_{i+1 \le j \le n} =$$

$$= \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)}{i(i-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(k-i-1) \cdot \ldots \cdot (k-n)}{-1 \cdot -2 \cdot \ldots \cdot -(n-i)} =$$

$$= \pm \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)}{i!} \cdot \frac{(k-i-1) \cdot \ldots \cdot (k-n)}{(n-i)!}$$

Binomialkoeff.

$$= \pm \underbrace{\binom{k}{i}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\binom{k-i-1}{n-i}}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!} = \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)}{i!}$$

für $k < 0$: $k = -m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$

$$E_i(k) = E_i(-m) = \pm E_i(\underbrace{m+n}_{> n}) \in \mathbb{Z}$$

b) $P(x) = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}[x]$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$P(k) = \frac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4:

"$\Leftarrow$" ist klar, da $f' = na(x-x_0)^{n-1} \mid f = n(x-x_0)^n$.

"$\Longrightarrow$" Angenommen, dass $f' \mid f$

Dann $f = f' \cdot h$, wobei h von Grad 1 ist $\left(\begin{array}{l} \text{Grad } f = n \\ \text{Grad } f' = n-1 \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ $h = a(x-x_0)$ für $a, x_0 \in K$

und $$f = a f' (x - x_0) \qquad (*)$$

Wir vergleichen die Hauptkoeffiziente in $(*)$

Sei $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ dann $f' = n a_n x^{n-1} + \dots$

und aus $(*)$: $a_n = a n a_n \Rightarrow a = \frac{1}{n}$

Wir bekommen $a = \frac{1}{n}$ und

$$n f = f'(x - x_0)$$
$$\Downarrow \text{ Ableitung } \quad ((uv)' = u'v + uv')$$
$$n f' = f''(x-x_0) + f'$$
$$\Downarrow$$
$$(n-1) f' = f''(x - x_0)$$

Mit Hilfe der Induktion nach k kann man zeigen: $(n-k) f^{(k)} = f^{(k+1)} (x - x_0) \quad \forall\, k = 0, \dots, n-1$

Wir haben

$$n f = f'(x-x_0)$$

$$(n-1) f' = f''(x-x_0)$$

$$\vdots$$

$$1 \cdot f^{(n-1)} = f^{(n)}(x-x_0)$$

Nach der Multiplikation aller Gleichungen:

$$n! \, f \cdot \underbrace{f' \cdot f'' \cdots f^{(n-1)}} = \underbrace{f' \cdot f'' \cdots f^{(n-1)}} f^{(n)} (x-x_0)^n$$

$\Downarrow$ Teilen die beide Seiten durch $f' \cdot f'' \cdots f^{(n-1)}$

$$n! \, f = f^{(n)} (x-x_0)^n$$

Wenn $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dann $f^{(n)}(x) = n! \, a_n$

Es folgt $n! \, f = f^{(n)} (x-x_0)^n = n! \, a_n (x-x_0)^n$

$$\Downarrow$$

$$f = a_n (x-x_0)^n$$

$\boxtimes$

Aufgabe 5

K Körper, $f \in K[X]$ mit Grad $f \leq 2$ oder 3

Dann $(f$ ist irr. in $K[X] \iff f$ hat keine NS in K ~~hat~~ $)$

$\overset{!!}{\iff}$

$(f$ ist reduzibel $\iff f$ hat eine NS $)$

"$\Leftarrow$" $\alpha \in K$ eine NS $\Rightarrow f = (x-\alpha)\, g$ mit Grad $g \geq 1$
reduzibel

"$\Rightarrow$" $f = gh$ $\quad g, h \notin K[X]^* \iff$ Grad $g, h \geq 1$

$\underset{2,3}{\text{Grad } f} = \text{Grad } g + \text{Grad } h \Rightarrow$ Grad g oder Grad $h = 1 \Rightarrow f$ hat eine NS in K

$K = \mathbb{Q}$, P ist primitiv

P ist irreduzibel in $\mathbb{Q}$ $\iff$ P hat keine NS in $\mathbb{Q}$ $\underset{(\text{Seite } 29)}{\overset{\text{Gauß Lemma + Bsik}}{\iff}}$ P hat keine NS in $\mathbb{Z}$.