Algebra

Übungsblatt 2

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
31.10.2022

Aufgabe 1. (1) Seien G eine Gruppe und g, h zwei Elemente von G sodass $\operatorname{ord}(g)$ und $\operatorname{ord}(h)$ teilerfremd sind. Angenommen, g und h kommutieren (d.h. $gh = hg$). Zeige: $\operatorname{ord}(gh) = \operatorname{ord}(g) \cdot \operatorname{ord}(h)$.
Bemerkung: Allgemein ist die Ordnung von gh gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\operatorname{ord}(g)$ und $\operatorname{ord}(h)$.
(2) Sei $\sigma \in S_5$ mit $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 5$, $\sigma(5) = 4$. Finde die Ordnung von σ in S_5.
(3) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finde die Ordnung von A und B in der Gruppe $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ und zeige, dass AB unendliche Ordnung in $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ hat.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit $| G |> 2$.
Zeige: $\operatorname{Aut} G \neq 1$.
Hinweis: Unterscheide folgende Fälle:
(a) G ist nicht abelsch.
(b) G ist abelsch und hat ein Element von Ordnung > 2.
(c) G ist abelsch und hat kein Element von Ordnung > 2.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und seien $N, M \triangleleft G$ normale Untergruppen.
(1) Zeige: $N \cap M \triangleleft G$ ist auch eine normale Untergruppe.
(2) Angenommen, $N \cap M = 1$. Zeige: Für alle $n \in N$ und $m \in M$ gilt $nm = mn$.
(3) Angenommen, der Index von M in G ist m. Zeige: $g^m \in M$ für jedes $g \in G$.

Aufgabe 4. Seien K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$.
(1) Zeige: Der Rest der Euklidischen Division von $X^n - 1$ durch $X^m - 1$ in $K[X]$ ist $X^r - 1$, wobei $r \in \mathbb{N}$ der Rest der Euklidischen Division von n durch m in $\mathbb{Z}$ ist.
(2) Folgere: $X^m - 1$ teilt $X^n - 1$ in $K[X]$ genau dann wenn $m|n$ in $\mathbb{Z}$.