Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (1) Seien $g, h \in G$, $gh = hg$.

$\operatorname{Ord} g = n$, $\operatorname{Org} h = m$ sind teilerfremd.

Z.z.: $\operatorname{Ord} gh = nm$

$$(gh)^{nm} = \underbrace{(gh)\cdot(gh)\cdot \ldots \cdot (gh)}_{nm \text{ Mal}} \underset{gh=hg}{=} g^{nm}\cdot h^{nm} = \underset{1}{(g^n)^m}\cdot\underset{1}{(h^m)^n} = 1$$

Es folgt: $\operatorname{Ord} gh \leq nm$

Wir bezeichnen $\ell = \operatorname{Ord} gh$. (*)

Dann $1 = (gh)^\ell = g^\ell h^\ell$

$$1 = ((gh)^\ell)^n = g^{\ell n} h^{\ell n} = \underset{1}{(g^n)^\ell} h^{\ell n} = h^{\ell n}$$

$$h^{\ell n} = 1 \xRightarrow[\text{Aufgabe 1}]{\text{Tutoriumsblatt 2}} m = \operatorname{ord} h \mid \ell n \xRightarrow[g.g.T(n,m)=1]{} m \mid \ell$$

Genau so $1 = ((gh)^\ell)^m = g^{\ell m} \Rightarrow n = \operatorname{ord} g \mid \ell m \Rightarrow n \mid \ell$

$$m \mid \ell \text{ und } n \mid \ell \xRightarrow[g.g.T(m,n)=1]{} mn \mid \ell \Rightarrow \operatorname{Ord} gh = \ell \geq nm \ (**)$$

(*) und (**) $\Rightarrow \operatorname{Ord} gh = nm$

(2)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{(1\,2\,3)}_{\substack{3-\text{Zyklus} \\ \operatorname{Ord} = 3}} \circ \underbrace{(4\,5)}_{\substack{\text{Transposition} \\ \operatorname{Ord} = 2}}$$

disjunkte Zyklen kommutieren

Es folgt aus (1), dass $\operatorname{Ord} \sigma = 2 \cdot 3 = 6$

(3) $A^2 = E_2 \Rightarrow \operatorname{ord} A = 2$

$B^3 = E_2 \Rightarrow \operatorname{ord} B = 2$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \neq E_2, \text{ da } c_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\operatorname{ord}(AB)$ ~~ist~~ $= \infty$

Aufgabe 2   Z.z.: $\mathrm{Aut}\, G \neq \{id\}$.

(a) Sei $g \in G$ und $g \notin Z(G)$.

Dann $\varphi_g : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto g x g^{-1}$ Gruppenautomorphismus

und $\varphi_g \neq id$ (sonst $xg = gx \ \forall x \in G$ und $g \in Z(G)$).

(b) G abelsch. $\varphi : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x^{-1}$ liegt in $\mathrm{Aut}(G)$ (Aufgabe 1.2 Üblatt 1)

Sei $x \in G$ mit $\mathrm{Ord}\, x > 2$, dann $\varphi(x) = x^{-1} \neq x$

Es folgt $\varphi \neq id$ und $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$

(c) G ist ein $\underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\overset{}{\mathbb{F}_2}}$ - Vektorraum (mit $\bar{0} \cdot x = 0$, $\bar{1} \cdot x = x$ und Gruppenoperation $= +$)

$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$|G| > 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$

Seien $B = \{e_i\}_{i \in I}$ eine Basis ($|I| \geq 2$)

und $e_i \neq e_j$ aus B.

$$\varphi : G \longrightarrow G, \quad e_k \longmapsto \begin{cases} e_k, & \text{falls } k \neq i,j \\ e_j, & \text{falls } k = i \\ e_i, & \text{falls } k = j \end{cases}$$

definiert eine Automorphismus von Vektorraum G (auch von der Gruppe G).

Aufgabe 3

(1) $N, M \trianglelefteq G \qquad \forall\, g \in G$ gilt $\quad gNg^{-1} \subseteq N$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad gMg^{-1} \subseteq M$

Dann
$$g(N\cap M)g^{-1} \subseteq gNg^{-1} \subseteq N$$
$$\subseteq gMg^{-1} \subseteq M \quad \Rightarrow \quad g(N\cap M)g^{-1} \subseteq N\cap M.$$

Es folgt: $\quad N \cap M \trianglelefteq G$

(2)

$$nm = mn \quad \Leftrightarrow \quad n m n^{-1} m^{-1} = 1$$

$$\overbrace{n}^{\in N}\,\overbrace{m\, n^{-1} m^{-1}}^{\in N} = \underbrace{n\, m\, n^{-1}}_{\in M}\,\underbrace{m^{-1}}_{\in M} \in N \cap M = \{1\}.$$

(3) $\quad |G/M| = n$

Nach dem Satz von Ferma (Satz 1.18) $\quad (gM)^m = M \quad$ in G/M

$\Rightarrow \quad g^m M = M \quad \Rightarrow \quad g^m \in M.$

Aufgabe 4

(1) Wir schreiben $n = mq + r$, mit $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
und $0 \leq r < m$

$$X^n - 1 = X^{mq+r} - 1 = X^{mq+r} - X^{\cancel{mq}\, r} + X^r - 1 =$$

$$= X^r\left((X^m)^q - 1\right) + \underbrace{X^r - 1}$$

$\uparrow$ teilbar durch $X^m - 1$

$r =$ Grad $<$ Grad von $X^m - 1 = m$

(2) $\quad m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^r - 1 = 0 \quad \underset{\text{Frage (1)}}{\Leftrightarrow} \quad X^m - 1 \mid X^n - 1$