

Algebra

Übungsblatt 13

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
30.01.2023

Aufgabe 1. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien. Zeige: F ist eine Äquivalenz genau dann wenn F essentiell surjektiv und volltreu ist.

Aufgabe 2. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor mit rechtsadjungierten G und G' . Zeige: G ist isomorph zu G' .

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $G\text{-Set}$ die Kategorie der G -Mengen (die Objekte sind G -Mengen und die Morphismen sind äquivariante Abbildungen zwischen G -Mengen – wie in der Vorlesung gezeigt ist diese Kategorie isomorph zu der Funktor-Kategorie $\text{Fun}(BG, \text{Set})$). Sei weiterhin $M \in \text{Set}$ eine Menge. Zeige:
(1) Der Vergissfunktork $G\text{-Set} \rightarrow \text{Set}$ welcher die G -Wirkung vergisst hat einen links- und einen rechtsadjungierten. Beschreibe diese Funktoren explizit.
(2) Der Funktor $M \times -: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ welcher das kartesische Produkt mit M nimmt hat einen rechtsadjungierten. Beschreibe diesen Funktor explizit.

Aufgabe 4. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} kleine Kategorien und seien $\text{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subseteq \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $\text{Fun}^R(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \subseteq \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ die vollen Unterkategorien auf Funktoren, welche einen rechtsadjungierten bzw. einen linksadjungierten besitzen (also welche selber linksadjungierte bzw. rechtsadjungierte sind). Zeige: Es gibt eine kanonische Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathcal{D})^{\text{op}} \simeq \text{Fun}^R(\mathcal{D}, \mathcal{C})$$

und mache explizit, welchen Effekt diese Äquivalenz auf Objekten und Morphismen hat.