Aufgabe 1

Bemerkung: $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\tau : F \to G$ naturliche Isomorphism.

$\forall\ X, Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) & \xrightarrow[\sim]{\text{Bijektion}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y)) \\ h & \longmapsto & \tau_Y \circ h \circ \tau_X^{-1} \\ \tau_Y^{-1} \circ h' \circ \tau_X & \longleftarrow & h' \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "h"'] & G(X) \arrow[d, "h'"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad F(f) \qquad G(f)$$

Es gilt $\varphi(F(f)) = G(f)$ (da τ eine nat. Transf ist)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y)) \\ \mathrm{Hom}_{C}(X, Y) \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

F ist treu / voll / volltreu <=> G ist treu / voll / volltreu.

" $\Longrightarrow$ "

Angenommen, F ist eine Äquivalenz ($\exists\ G : D \to \mathcal{C}$ mit $G \circ F \cong id_C$, $F \circ G \underset{\alpha}{\cong} id_D$)

id_C, id_D volltreu $\xRightarrow{\text{Bmk}}$ $G \circ F$ und $F \circ G$ volltreu

$\Downarrow$ F treu & G voll

$\Downarrow$ G treu & F voll

Es folgt: F ist volltreu.

F ist essentiell surjektiv, da $\forall\ Y \in D$, $F(G(Y)) \xrightarrow[\alpha_Y]{\cong} Y$.

"$\Longleftarrow$"

Angenommen, dass $F: C \to D$ volltreu und essentiell surjektiv ist.

Für jedes $X \in D$ kann man wählen $G(X) \in C$ mit

$X \underset{\eta_X}{\cong} F(G(X))$ (da F essentiell surjektiv ist)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong", "\eta_X"'] \arrow[d, "\forall f"'] & F(G(X)) \\ Y \arrow[r, "\cong", "\eta_Y"'] & F(G(Y)) \end{tikzcd}$$

~~definieren wir $G(f) :=$~~
haben wir $\eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1} \in \mathrm{Hom}_D(F(G(X)), F(G(Y)))$

F volltreu $\to$ ‖

$F(g)$, wobei $g \in \mathrm{Hom}_C(G(X), G(Y))$

eindeutig definiert

Wir definieren $G(f) := g \in \mathrm{Hom}_C(G(X), G(Y))$

(einzige Morphismus $\in \mathrm{Hom}_C(G(X), G(Y))$ mit $\eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1} = F(G(f))$)

Zu zeigen: $G: D \to C$ ist ein Funktor

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Z$

$$F(G(f' \circ f)) = \eta_Z \circ f' \circ f \circ \eta_X^{-1} = \eta_Z \circ f' \circ \eta_Y^{-1} \circ \eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1} =$$

$$= F(G(f')) \circ F(G(f)) = F(G(f') \circ G(f)) \xRightarrow[F \text{ volltreu}]{} G(f' \circ f) = G(f') \circ G(f)$$

~~‖ da $G(f' \circ f)$~~

Es bleibt zu zeigen: $G \circ F \cong id_C$ und $F \circ G \cong id_D$

$$\begin{tikzcd} D \ni X \arrow[r, "\cong", "\eta_X"'] \arrow[d, "f"'] & F(G(X)) \arrow[d, "F(G(f))"] \\ D \ni Y \arrow[r, "\cong", "\eta_Y"'] & F(G(Y)) \end{tikzcd}$$

$F(G(f)) \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$

da $F(G(f)) := \eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1}$

$\Rightarrow \eta : id_D \cong F \circ G$ natürliche Isomorphismus

$\forall X \in C \quad \eta_{F(X)} : F(X) \xrightarrow{\cong} F(G(F(X)))$

$\Downarrow$ F volltreu

$\exists!\ \varepsilon_X : X \xrightarrow{\cong} G(F(X))$ mit $F(\varepsilon_X) = \eta_{F(X)}$

Man kann direkt überprüfen, dass $\varepsilon : id_C \to G \circ F$ nat. Iso ist.

Aufgabe 2 $\qquad F: C \longrightarrow D, \quad G, G': D \longrightarrow C$

Nach der Definition haben wir einen ~~Ko~~ natürlichen Iso:

$Hom(-, G(-)) : \mathcal{C}^{op}: D \to Sets$

$Hom(-, G'(-))$ $\qquad Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \overset{\alpha_{X,Y}}{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X, G'(Y))$

Sei $Y \in D$, dann $\qquad Hom_{\mathcal{C}}(-, G(Y)) \overset{\alpha_{-,Y}}{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(-, G'(Y))$

$$Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \overset{\alpha_{G(Y),Y}}{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G'(Y))$$

$$id_{G(Y)} \longmapsto \alpha_{G(Y),Y}(id_{G(Y)})$$

$\Longrightarrow$

Yoneda Lemma

Korollar 6.16 $\qquad \alpha_{G(Y),Y}(id_{G(Y)}) : G(Y) \xrightarrow{\sim} G'(Y)$.

Isomorphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tau_Y := \alpha_{G(Y),Y}(id_{G(Y)}) : G(Y) \longrightarrow G'(Y)$

eine nat. Transformation definiert.

Z.z:

$$\begin{tikzcd} Y \in \mathcal{C} \arrow[d, "\forall f"'] \\ Y' \in \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "G(f)"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G'(Y) \arrow[d, "G'(f)"] \\ G(Y') \arrow[r, "\tau_{Y'}"'] & G'(Y') \end{tikzcd} \iff G'(f) \circ \tau_Y = \tau_{Y'} \circ G(f)$$

$\alpha_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X, G'(Y))$ ist eine nat. Transf.

$X = G(Y)$, $\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \\ Y' \end{tikzcd} \rightsquigarrow$

$X = G(Y)$, $Y = Y'$

$\begin{tikzcd} X = G(Y) \arrow[d, "G(f)"'] \\ X' = G(Y') \end{tikzcd} \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} id_{G(Y)} \arrow[rr, dashed, mapsto] & & \tau_Y \\ Hom(G(Y), G(Y)) \arrow[rr, "\alpha_{G(Y),Y}"] \arrow[d, "G(f)_*"'] \arrow[drr, phantom, "///"] & & Hom(G(Y), G'(Y)) \arrow[d, "G'(f)_*"] \\ Hom(G(Y), G(Y')) \arrow[rr, "\alpha_{G(Y),Y'}"] \arrow[drr, phantom, "///"] & & Hom(G(Y), G'(Y')) \\ Hom(G(Y'), G(Y')) \arrow[rr, "\alpha_{G(Y'),Y'}"] \arrow[u, "G(f)^*"] & & Hom(G(Y'), G'(Y')) \arrow[u, "G(f)^*"'] \\ id_{G(Y')} \arrow[rr, dashed, mapsto] & & \tau_{Y'} \end{tikzcd}$$

$\varphi \mapsto G(f) \circ \varphi$, $\quad \psi \mapsto G'(f) \circ \psi$

$\varphi \mapsto \varphi \circ G(f)$, $\quad \psi \mapsto \psi \circ G(f)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{G(Y)} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \tau_Y \arrow[d, dashed] \\
G(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & G'(f) \circ \tau_Y \arrow[d, equal] \\
G(f) \arrow[r, "\tau_{G(Y),Y'}"] & \tau_{Y'} \circ G(f) \\
\mathrm{id}_{G(Y')} \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & \tau_{Y'} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 3.1

$U: \quad G\text{-Sets} \longrightarrow \text{Sets}$ Vergissfunktor

Wir zeigen, dass $F: \text{Sets} \longrightarrow G\text{-Sets}$ linksadjungiert zu U ist.

- $X \longmapsto F(X) := G \times X$

  G-Menge mit $g' \cdot (g, x) = (g'g, x)$

- $\mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G\text{-Sets}}(G \times X, G \times Y)$

  $f \longmapsto id_G \times f$

Seien $X \in \text{Sets}$ und $Y \in G\text{-Sets}$

~~τ_X: Hom~~ $\quad \tau_{X,Y}: \quad \mathrm{Hom}_{G\text{-Sets}}(\underbrace{G \times X}_{F(X)}, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(X, \underbrace{Y}_{U(Y)})$

$$\varphi \longmapsto \varphi(1, -): X \to Y$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi: G \times X \to Y \\ \varphi(g, x) = g \cdot f(x) \end{array}\right] \longleftarrow f$$

$$\forall \quad \begin{array}{cc} \text{Sets} & G\text{-Sets} \\ X & Y \\ f \uparrow & \psi \downarrow \\ X' & Y' \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G\text{-Sets}}(G \times X, Y) \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(X, Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{G\text{-Sets}}(G \times X', Y') \arrow[r, "\tau_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(X', Y')
\end{tikzcd}$$

$\varphi \longmapsto \psi \circ \varphi \circ F(f)$ $\qquad$ $\varphi' \longmapsto \psi \circ \varphi' \circ f$

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \varphi(1, -) \arrow[d] \\
\psi \circ \varphi \circ (id_G \times f) & \psi \circ \varphi(1, -) \circ f(x') = \psi(\varphi(1, f(x')))
\end{tikzcd}$$

$x' \in X'$

$\psi \circ \varphi \circ (id_G \times f) \longrightarrow \psi \circ \varphi \circ (id_G \times f)(\cancel{\ })$ $\qquad$ $//$

$(1, -)$

$X' \ni x' \longmapsto \psi(\varphi(1, f(x')))$

Z.z.: $G': \text{Sets} \longrightarrow G\text{-Sets}$

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(G, Y) =$$

$\nearrow$ G-Menge: $\forall g \in G,\ f \in \mathrm{Hom}(G, Y)$

$$(g \circ f)(h) = f(hg)$$

$\forall X \in G\text{-Sets},\ Y \in \text{Sets}$

$$\mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(\overset{U(X)}{X}, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{G\text{-Sets}}(X, \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(G, Y))$$

$$f \longmapsto \left[x \longmapsto f_x : \begin{array}{l} G \to Y \\ h \mapsto f(hx) \end{array} \right]$$

$$\varphi(x)(1) \longleftarrow \varphi$$

---

(2) $F: \text{Sets} \longrightarrow \text{Sets}$

$$X \longmapsto M \times X$$

$\forall X, Y \in \text{Sets}$

$$\mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(M \times X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(X, \underbrace{\mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(M, Y)}_{G(Y)}),$$

wobei $G = \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(M, -): \text{Sets} \longrightarrow \text{Sets}.$

Aufgabe 4

Bmk $F, G : \mathcal{C} \to D$, Funktoren, $H : D \to D'$, $T : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$

Sei $\tau : F \to G$ eine nat. Transformation

Dann $H \circ \tau : H \circ F \to H \circ G$ sind auch nat. Transf.

$\tau_{T(-)} : F \circ T \to G \circ T$

$$\begin{tikzcd}
F(T(X)) \arrow[r, "\tau_{T(X)}"] \arrow[d, "F(T(f))"] & G(T(X)) \arrow[d, "G(T(f))"] \\
F(T(Y)) \arrow[r, "\tau_{T(Y)}"'] & G(T(Y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H(F(X)) \arrow[r, "H(\tau_X)"] \arrow[d, "H(F(f))"'] & H(G(X)) \arrow[d, "H(G(f))"] \\
H(F(Y)) \arrow[r, "H(\tau_Y)"'] & H(G(Y))
\end{tikzcd}$$

$$\Phi : \mathrm{Fun}^L(C, D)^{op} \longrightarrow \mathrm{Fun}^R(D, C)$$

$$F \longmapsto G \quad \text{rechtsadjungiert zu } F$$

Seien $F_1, F_2 \in \mathrm{Fun}^L(C, D)$ mit $\Phi(F_1) = G_1$, und $\Phi(F_2) = G_2$

$\mathrm{Nat}(F_1, F_2)$ sind die Morphismen $\mathrm{Hom}(F_2, F_1)$ in $\mathrm{Fun}^L(C, D)^{op}$

nat. Transf.
zwischen F_1 und F_2

$$\Phi : \mathrm{Nat}(F_1, F_2) \longrightarrow \mathrm{Nat}(G_2, G_1)$$

$$\tau \longmapsto \Phi(\tau)$$

Seien $\eta_1 : id_{\mathcal{C}} \to G_1 \circ F_1$, $\eta_2 : id_{\mathcal{C}} \to G_2 \circ F_2$ nat. Transf. (siehe Lemma 6.20)

$\varepsilon_1 : F_1 \circ G_1 \to id_D$, $\varepsilon_2 : F_2 \circ G_2 \to id_D$

$\Phi(\tau)_Y :=$ Komposition
$$\begin{tikzcd}
G_2(Y) \arrow[r, "\eta_1 G_2(Y)"] & G_1 F_1(G_2(Y)) \arrow[r, "G_1 \circ \tau_{G_2(Y)}"] & G_1 \circ F_2 \circ G_2(Y) \arrow[d, "G_1(\varepsilon_Y)"] \\
& & G_1(Y)
\end{tikzcd}$$

$\Downarrow$

$\Phi(\tau) \in \mathrm{Nat}(G_2, G_1)$ (nach der Bmk)

φ ist ein Funktor & volltreu

~~und~~ $\quad \varphi : \mathrm{Nat}(F_1, F_2) \longrightarrow \mathrm{Nat}(G_2, G_1)$ Bijektion

mit Inverse

$$\mathrm{Nat}(G_2, G_1) \longrightarrow \mathrm{Nat}(F_1, F_2)$$

$$\theta \longmapsto \text{Komposition}\underset{X}{:}\quad \begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "\varepsilon^{-1}_{2\,F_1(X)}"] & F_2 G_2 F_1(X) \arrow[d, "F_2 \theta_{F_1(X)}"] \\ & F_2 G_1 F_1(X) \arrow[d, "F_2(\eta^{-1}_{1X})"] \\ & F_2(X) \end{tikzcd}$$

Nach Aufgabe 2 ist φ essentiell surjektiv

Nach Aufgabe 1 ist φ eine Äquivalenz von Kategorien.

Seien $F \xrightarrow{\alpha} F' \xrightarrow{\beta} F''$ nat. transform. von Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

und $(F, G, \eta, \varepsilon)$, $(F', G', \eta', \varepsilon')$, $(F'', G'', \eta'', \varepsilon'')$ Adjunktionen.

Seien $G'' \xrightarrow{\hat{\beta}} G' \xrightarrow{\hat{\alpha}} G$ die assoziierten Transformationen

<u>zz:</u> $\hat{\alpha} \circ \hat{\beta} = \widehat{(\beta \circ \alpha)} \in \mathrm{Hom}(G'', G)$

<u>genügt zz:</u> $\forall y \in \mathcal{D}$: $(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})_y \overset{\circledast}{=} \widehat{(\beta \circ \alpha)}_y \in \mathrm{Hom}(G''(y), G(y))$

$$\Big\downarrow \cong \text{ Adjuktion } F'', G''$$

Zeigen die Gleichheit $\circledast$ in $\longrightarrow \mathrm{Hom}(FG''(y), y)$

<u>einfacher:</u> $\widehat{(\beta \circ \alpha)}_y$ korrespondiert zu der Abbildung

$$FG''(y) \xrightarrow{\alpha_{G''(y)}} F'G''(y) \xrightarrow{\beta_{G''(y)}} F''G''(y) \xrightarrow{\varepsilon''_y} y .$$

Nun wollen wir $(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})_y$ unter dieser Bijektion verstehen.

<u>dafür zunächst:</u> ist $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} GB$ eine Komposition, so ist die "adjungierte" Abbildung geben durch $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A') \xrightarrow{\hat{g}} B$ wobei $\hat{g}$ adjungiert zu g ist.

$\Rightarrow$ müssen betrachten

$$\begin{tikzcd}
FG''(y) \arrow[r, "F(\hat{\beta}_y)"] \arrow[d, "\alpha_{G''(y)}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & FG'(y) \arrow[r, "\widehat{(\hat{\alpha})}"] \arrow[d, "\alpha_{G'(y)}"] & y \\
F'G''(y) \arrow[r, "F'(\hat{\beta}_y)"'] & F'G'(y) \arrow[ur, "\varepsilon'_y"'] &
\end{tikzcd}$$

Natürlichkeit von $\alpha : F \to F'$
angewendet auf die Abb. $\hat{\beta}_y : G''(y) \to G'(y)$

es gilt also, dass $(\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta})_y$ unter der betrachteten Bijektion zu der Komposition

$$\begin{tikzcd}
FG''(y) \arrow[r, "\alpha_{G''(y)}"] & F'G''(y) \arrow[r, dashed, "\beta_{G''(y)}"] \arrow[d, "F'(\hat{\beta}_y)"'] \arrow[dr, phantom, "\nabla\ \overset{?}{\equiv}"] & F''G''(y) \arrow[d, dashed, "\varepsilon''_y"] \\
& F'G'(y) \arrow[r, "\varepsilon'_y"'] & y
\end{tikzcd}$$

dieses Quadrat fragt nach einer Gleichung in

$$\mathrm{Hom}(F'G''(y), y) \cong \mathrm{Hom}(G''(y), G'(y))$$

$$\varepsilon'_y \circ F'(\hat{\beta}_y) \longmapsto \hat{\beta}_y \quad \text{per Konstruktion,}$$

und $\hat{\beta}_y$ ist definiert sodass es unter dieser Bijektion zu $\varepsilon''_y \circ \beta_{G''(y)}$ korrespondiert

$\boxtimes$