# Algebra

## Übungsblatt 12

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
23.01.2023

**Aufgabe 1.** Zeige: Jede Gruppe mit 45 Elementen ist abelsch.
*Hinweis:* Benutze Aufgabe 1 von Übungsblatt 11.

**Aufgabe 2.** Zeige: $A_5$ ist einfach.
*Hinweis:* Sei $N \subset A_5$ eine normale Untergruppe von Index $m$, $1 < m < |A_5| = 60$. Betrachte den kanonischen Gruppenhomomorphismus $A_5 \to A_5/N$ und zeige, dass $3 \mid m$ (benutze dafür, dass $A_5$ von 3-Zyklen erzeugt wird). Zeige, dass keine Sylow $p$-Untergruppe von $A_5$ normal in $A_5$ ist und betrachte danach Sylow $p$-Untergruppen von $N$.

**Aufgabe 3.** Sei $G$ eine einfache Gruppe mit einer Untergruppe vom Index $n > 1$. Zeige: $G$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $S_n$.

**Aufgabe 4.** Sei $G$ eine einfache Gruppe mit 60 Elementen.
Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass $G$ isomorph zu $A_5$ ist.
(1) Angenommen, dass $G$ eine Untergruppe von Index $m$ enthält mit $0 < m \leq 5$. Zeige: $G \cong A_5$. *Hinweis:* Benutze Aufgabe 3.

Jetzt nehmen wir an, dass alle Untergruppen von $G$ Index größer als 5 haben und suchen einen Widerspruch.
(2) Bestimme $n_2$, $n_3$ und $n_5$, wobei $n_p$ die Anzahl der Sylow $p$-Untergruppen in $G$ ist.
*Hinweis:* $n_p = |G : N_G(P)|$, wobei $P$ eine Sylow $p$-Untergruppe ist und $N_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$ den Normalisator von $P$ bezeichnet.
(3) Zeige: es existieren zwei verschieden Sylow 2-Untergruppen $P_1$ und $P_2$ von $G$ sodass die Untergruppe $H = P_1 \cap P_2$ zwei Elemente enthält.
(4) Zeige: $P_1 \subset N_G(H)$ und $P_2 \subset N_G(H)$.
(5) Zeige: $N_G(H) \neq G$ und $|G : N_G(H)| \leq 5$.
*Bemerkung:* Es folgt aus Aufgabe 2 und dieser Aufgabe, dass $A_5$ die einzige einfache Gruppe (bis auf Isomorphie) mit 60 Elementen ist.