Algebra

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
23.01.2023

Aufgabe 1. Zeige: Jede Gruppe mit 45 Elementen ist abelsch.
Hinweis: Benutze Aufgabe 1 von Übungsblatt 11.

Aufgabe 2. Zeige: A_5 ist einfach.
Hinweis: Sei $N \subset A_5$ eine normale Untergruppe von Index m, $1 < m < |A_5| = 60$. Betrachte den kanonischen Gruppenhomomorphismus $A_5 \to A_5/N$ und zeige, dass $3 \mid m$ (benutze dafür, dass A_5 von 3-Zyklen erzeugt wird). Zeige, dass keine Sylow p-Untergruppe von A_5 normal in A_5 ist und betrachte danach Sylow p-Untergruppen von N.

Aufgabe 3. Sei G eine einfache Gruppe mit einer Untergruppe vom Index $n > 1$. Zeige: G ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

Aufgabe 4. Sei G eine einfache Gruppe mit 60 Elementen.
Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass G isomorph zu A_5 ist.
(1) Angenommen, dass G eine Untergruppe von Index m enthält mit $0 < m \leq 5$. Zeige: $G \cong A_5$. *Hinweis:* Benutze Aufgabe 3.

Jetzt nehmen wir an, dass alle Untergruppen von G Index größer als 5 haben und suchen einen Widerspruch.
(2) Bestimme n_2, n_3 und n_5, wobei n_p die Anzahl der Sylow p-Untergruppen in G ist.
Hinweis: $n_p = |G : N_G(P)|$, wobei P eine Sylow p-Untergruppe ist und $N_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$ den Normalisator von P bezeichnet.
(3) Zeige: es existieren zwei verschieden Sylow 2-Untergruppen P_1 und P_2 von G sodass die Untergruppe $H = P_1 \cap P_2$ zwei Elemente enthält.
(4) Zeige: $P_1 \subset N_G(H)$ und $P_2 \subset N_G(H)$.
(5) Zeige: $N_G(H) \neq G$ und $|G : N_G(H)| \leq 5$.
Bemerkung: Es folgt aus Aufgabe 2 und dieser Aufgabe, dass A_5 die einzige einfache Gruppe (bis auf Isomorphie) mit 60 Elementen ist.

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 45 = 3^2 \cdot 5$

$n_3 \mid 5$ und $n_3 \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow n_3 = 1$

$n_5 \mid 9$ und $n_5 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow n_5 = 1$

Es folgt aus Aufgabe 1 (Übblatt 11), dass

$G \simeq P_3 \times P_5$, wobei P_3 (und bzgl P_5) die einzige Sylow 3-UG (bzgl 5-UG) ist.

$$\left.\begin{array}{l} |P_5| = 5 \Rightarrow P_5 \simeq \mathbb{Z}/5 \text{ ist abelsch} \\ |P_3| = 3^2 \xRightarrow[\text{Korollar 5.10 Vorlesung}]{} P_3 \text{ ist abelsch} \end{array}\right\} \Rightarrow G \simeq P_3 \times P_5 \text{ ist abelsch}$$

Aufgabe 2

Wir folgen den Hinweis.

$\pi : A_5 \longrightarrow A_5/N$ kanonische Projektion.

Jede 3-Zykelus $\in A_5$

A_5 ist von 3-Zyklen erzeugt.

Falls π (alle 3-Zyklen) $= 1 \in A_5/N$,

dann alle 3-Zyklen $\in N \Rightarrow N = A_5$.

Es existier σ 3-Zykel $\in A_5$ mit $\pi(\sigma) \neq 1$ in A_5/N.

Dann $\operatorname{Ord} \pi(\sigma) = 3$ und $3 \mid |A_5/N| = m$

Es folgt $1 < |N| \leq 20 = 2^2 \cdot 5$

Ein 5-Zykelus erzeugt eine Sylow 5-UG in A_5
3-Zyklus ——— " ——— 3-UG in A_5

$$\langle (12345) \rangle \neq \langle (12534) \rangle \Rightarrow n_5 > 1$$

$$\langle (123) \rangle \neq \langle (345) \rangle \Rightarrow n_3 > 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} id, (12)(34) \\ (13)(24), (14)(23) \end{matrix} \right\} \neq \left\{ \begin{matrix} id, (23)(45) \\ (24)(35), (25)(34) \end{matrix} \right\} \Rightarrow n_2 > 1$$

zwei verschieden Sylow 2-UG.

Angenommen $5 \mid |N|$ und $n_5' =$ die Anzahl Sylow 5-UG in N

$n_5' \mid 4$, $n_5' \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow n_5' = 1 \Rightarrow \underset{\text{Sylow 5-UG in } N}{P} \trianglelefteq N \trianglelefteq G$

$\Rightarrow$ Dann $P \trianglelefteq G$ (Aufgabe 2, Tutoriumsblatt 11) ↯ (Widerspruch, so $5 \nmid |N|$)

$5 \nmid |N| \quad \Rightarrow \quad |N| = 2$ oder 4

Wenn $|N| = 4$ dann $\underset{\uparrow}{N} \trianglelefteq G$ aber $n_2 > 1$.

Sylow 2-UG

Wenn $|N| = 2$ dann $N = \{id, (ij)\}$

Transposition

$\sigma (ij) \sigma^{-1} = (\sigma(i)\,\sigma(j)) \quad \Rightarrow$ N ist nicht normal in G.

Widerspruch.

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ Untergruppe mit $|G:H| = n > 1$

$X = G/H$ (Menge der Linksnebenklassen bzgl. H)

G wirkt auf G/H durch Linksmultiplikation

$$g \cdot g'H = (gg')H \qquad \text{für } g \in G,\ g'H \in G/H \quad (g' \in G)$$

Dann haben wir einen Gruppenhom.

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G &\longrightarrow S(X) \\ g &\longmapsto \varphi_g : X \longrightarrow X \\ & \qquad\qquad g'H \longmapsto gg'H \end{aligned}$$

G einfach $\overset{\text{und}}{\Rightarrow}$ $\operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G$ $\Longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$ oder $\operatorname{Ker}\varphi = G$.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{ g \in G \mid \varphi_g = id_X \}$

Falls $g \notin H$, $\varphi_g(H) = gH \neq H \implies \varphi_g \neq id_X$

Es folgt dass $\operatorname{Ker}\varphi \neq G$ und dann $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.

Dann $\varphi : G \longrightarrow S(X) \simeq S_{|X|} = S_n$ ist injektiv

und $G \simeq \operatorname{Im}\varphi \subset S_n$.

Aufgabe 4

(1) Aufgabe 3 $\Rightarrow$ $G \simeq G' \subset S_m$, $|G'| = 60$, $|S_m| = m!$

Wenn $m \leq 4$, dann $|G'| = 60 > \cancel{m!}\ 4! = 24 \geq |S_m|$

Dann $m = 5$ und $|S_5 : G'| = \dfrac{5!}{60} = \dfrac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{60} = 2$

$\Longrightarrow$ $G' = A_5$

Sehe den Beweis von Aufgabe 1 (Üblatt 9)

(2) Angenommen, dass alle UG von G Index größer als 5 haben.

$|G| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

~~$n_2 \mid 15$, n_2~~ p eine Primzahl

~~$n_p \equiv |N_G(S_p)|$~~

$n_p = |G : N_G(P)|$, wobei ~~S_p~~ P eine Sylow p-UG ist.

Aufgabe 2.1 Tutoriums blatt 12 — Normalisator von P

Es folgt $n_2, n_3, n_5 > 5$.

$n_2 \mid 15$, $n_2 \equiv 1 \mod 2$ $\Rightarrow$ $n_2 = 15$

$n_3 \mid 20$, $n_3 \equiv 1 \mod 3$ $\Rightarrow$ $n_3 = 10$

$n_5 \mid 12$, $n_5 \equiv 1 \mod 5$ $\Rightarrow$ $n_5 = 6$

(3) Seien P_i und P_j zwei Sylow p-UG mit $p = 3$ oder 5

Dann $P_i \cap P_j = \{e\}$.

Wenn $p \neq q$ Primzahle, dann

$\{$eine Sylow-p-UG$\} \cap \{$eine Sylow q-UG$\} = \{e\}$

Alle Sylow 3-UG und 5-UG enthälten zusammen

$1 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = 45$ verschiede Elemente.

Wenn jede zwei verschieden Sylow 2-UG einen trivialen Schnitt haben, dann gibt es

$45 + 3 \cdot 15 = 90$ verschiedene Elemente in G. (aber $|G| = 60$)

Es folgt, dass $\exists\, P_1, P_2$ Sylow 2-UG mit $|P_1 \cap P_2| = 2$ (und $|P_1| = |P_2| = 4$). Wir bezeichnen $H := P_1 \cap P_2$

(4) Eine Gruppe mit 4 Elementen ist abelsch $(\cong \mathbb{Z}/_4$ oder $\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2)$

$\Rightarrow$ P_1 und P_2 sind abelsch und $H \subset P_1$, $H \subset P_2$

$\Rightarrow$ $P_1, P_2 < N_G(H)$. Dann $|N_G(H)| > 4$

und $|P_1| = 4 \mid |N_G(H)| \mid 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Es folgt $|N_G(H)| \geq 12$ aber dann $|G : N_G(H)| \leq 5$

$N_G(H) \neq G$, sonst $H \trianglelefteq N_G(H) = G$, aber G ist einfach.

Wir bekommen einen Widerspruch.