Algebra

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Markus Land	WiSe 2022/2023
Dr. Maksim Zhykhovich	16.01.2023

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe zeigen wir eine Verallgemeinerung von Satz 5.18 (1) der Vorlesung. Sei G eine endliche Gruppe sodass alle Sylow p-Untergruppen von G Normalteiler sind.
Zeige: Die Gruppe G ist isomorph zu direktem Produkt aller ihrer Sylow p-Untergruppen.

Aufgabe 2. Sei H eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_5 mit 8 Elementen.
Zeige: H ist isomorph zur Diedergruppe D_4.

Aufgabe 3. Seien G eine endliche Gruppe, $H \triangleleft G$ ein Normalteiler, und P eine Sylow p-Untergruppe von H.
Zeige: $G = H \cdot N_G(P)$, wobei $N_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$ den Normalisator von P bezeichnet.
Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $g \in G$ die Gruppe gPg^{-1} auch eine p-Sylowuntergruppe von H ist.

Aufgabe 4. Seien G eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und p eine Primzahl mit $p \mid |G|$.
Zeige: Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^p = e$ ist durch p teilbar.
Folgere, dass es ein Element von Ordnung p in G gibt.
Hinweis: Sei $X = \{(g_1, ..., g_p) \mid g_i \in G, g_1 \cdot g_2 \cdot ... \cdot g_p = e\}$. Die zyklische Gruppe $C_p = \langle \sigma \mid \sigma^p \rangle$ wirkt auf X durch $\sigma(g_1, ..., g_p) := (g_p, g_1, ..., g_{p-1})$.