Algebra

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
16.01.2023

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe zeigen wir eine Verallgemeinerung von Satz 5.18 (1) der Vorlesung. Sei G eine endliche Gruppe sodass alle Sylow p-Untergruppen von G Normalteiler sind.
Zeige: Die Gruppe G ist isomorph zu direktem Produkt aller ihrer Sylow p-Untergruppen.

Aufgabe 2. Sei H eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_5 mit 8 Elementen.
Zeige: H ist isomorph zur Diedergruppe D_4.

Aufgabe 3. Seien G eine endliche Gruppe, $H \triangleleft G$ ein Normalteiler, und P eine Sylow p-Untergruppe von H.
Zeige: $G = H \cdot N_G(P)$, wobei $N_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$ den Normalisator von P bezeichnet.
Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $g \in G$ die Gruppe gPg^{-1} auch eine p-Sylowuntergruppe von H ist.

Aufgabe 4. Seien G eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und p eine Primzahl mit $p \mid |G|$.
Zeige: Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^p = e$ ist durch p teilbar.
Folgere, dass es ein Element von Ordnung p in G gibt.
Hinweis: Sei $X = \{(g_1, ..., g_p) \mid g_i \in G, g_1 \cdot g_2 \cdot ... \cdot g_p = e\}$. Die zyklische Gruppe $C_p = \langle \sigma \mid \sigma^p \rangle$ wirkt auf X durch $\sigma(g_1, ..., g_p) := (g_p, g_1, ..., g_{p-1})$.

Aufgabe 1

$|G| = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$

$S_1, \ldots, S_m \triangleleft G$ Sylowuntergruppen $|S_i| = p_i^{\alpha_i}$

Übungsblatt 2, Aufgabe 3.2

G Gruppe, $N \triangleleft G$, $M \triangleleft G$ mit $N \cap M = \{1\}$. (*)

Dann $\forall n \in N, \forall m \in M$: $nm = mn$.

$$[n,m] = \underbrace{\overbrace{n\,m n^{-1}}^{\in N}}_{\in M}\ \overbrace{\underbrace{m^{-1}}_{\in M}}^{\in N} \in N \cap M = \{1\}$$

$S_i \triangleleft G$, $S_j \triangleleft G$ $i \neq j$ $S_i \cap S_j$ ist eine Untergruppe von S_i und von S_j

Nach Lagrange Satz

$|S_i \cap S_j|$ teilt $|S_i| = p_i^{\alpha_i}$ und $|S_j| = p_j^{\alpha_j}$

teilerfremd

$\Rightarrow |S_i \cap S_j| = 1 \Rightarrow S_i \cap S_j = \{1\}$

Es folgt (*) gilt für S_i und S_j, $i \neq j$.

und dann $xy = yx$ $\forall x \in S_i, y \in S_j$

$\Downarrow$

die Abbildung: $\varphi: S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m \longrightarrow G$

$(g_1, g_2, \ldots, g_m) \longmapsto g_1 g_2 \cdot \ldots \cdot g_m$

$g = (g_1, \dots, g_m)$ $\qquad gg' = (g_1 g_1', \dots, g_m g_m')$

$g' = (g_1', \dots, g_m')$

$$\varphi(g)\varphi(g') = g_1 \cdot \dots \cdot g_m \, g_1' \cdot \dots \cdot g_m' \qquad g_i' \cdot g_j = g_j \cdot g_i' \quad \forall i \neq j$$

$\quad \| \;$ da

$$\varphi(gg') = g_1 g_1' \cdot g_2 \cdot g_2' \cdot \dots \cdot g_m g_m'$$

φ ist ein Gruppenhom.

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = |G| = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$$

Injektivität von φ:

Angenommen $\varphi(g_1, \dots, g_m) = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m = 1$, $g_i \in S_i$

$$g_i \in S_i \;, \Rightarrow g_i^{|S_i|} = 1 \Rightarrow \underbrace{g_i^{p_i^{\alpha_i}} = 1}_{(*)}$$

$$g_1 \cdot \dots \cdot g_m = 1$$

$\underline{\forall i = 1, \dots, m}$: $\quad (g_1 \cdot \dots \cdot g_m)^{\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}} = 1$

$\| (*)$

$$g_i^{\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}} = 1$$

$$g_i^{p_i^{\alpha_i}} = 1 \quad \text{und} \quad g_i^{\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}} = 1$$

teilerfremd

$\mathrm{Ord}_G\, g_i$ teilt $p_i^{\alpha_i}$ und $\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}} \Rightarrow \mathrm{Ord}_G\, g_i = 1 \Rightarrow g_i = 1$.

$\Rightarrow (g_1, \dots, g_m) = (1, 1, \dots, 1) \Rightarrow \varphi$ ist injektive.

$|S_1 \times \dots \times S_m| = |G| \Rightarrow \varphi$ ist ein Gruppeniso

Aufgabe 2

D_4 ist die Symmetriegruppe eines Quadrats, $D_4 < S_4 < S_5$
(D₄ permutiert die Ecken des Quadrats)

$|D_4| = 8$, $\quad |S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

D_4 und H sind zwei 2-Sylow Untergruppen in S_5.

Nach Sylowsätze sind D_4 und H konjugiert.

$D_4 = gHg^{-1}$ für ein $g \in S_5$

Dann $\varphi: H \longrightarrow D_4 = gHg^{-1}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

$h \longmapsto ghg^{-1}$

Aufgabe 3 $\quad G$ Gruppe, $|G| < \infty$, $H \trianglelefteq G$

P p-Sylowuntergruppe von H

$$\underset{\substack{\uparrow \\ p\text{-Sylow}}}{P \subset} H \trianglelefteq G$$

Zu zeigen: $G = H \cdot N_G(P)$, wobei $N_G(P) := \{ g \in G \mid gPg^{-1} = P \}$

$$P \trianglelefteq N_G(P) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{genau dann wenn } P \trianglelefteq G}}{\subseteq} G$$

(sehen auch Tutoriumblatt 11, Aufgabe 2.2)

- $S \trianglelefteq N \trianglelefteq G \not\Rightarrow S \trianglelefteq G$
- $\underset{\substack{\uparrow \\ p\text{-Sylow}}}{S \trianglelefteq} N \trianglelefteq G \Longrightarrow S \trianglelefteq G$

$\underset{\substack{\uparrow \\ p\text{-Sylow}}}{P \subset} H \trianglelefteq G$ $\qquad$ z.z.! $G = H \cdot N_G(P)$

$\qquad\qquad g = \overset{\in}{h} \cdot \overset{\in}{g'}$

Sei $g \in G$: $\quad gPg^{-1} \subset gHg^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } H \trianglelefteq G}}{=} H$

gPg^{-1} ist eine Untergruppe in H und $|gPg^{-1}| = |P|$

$\Rightarrow gPg^{-1}$ ist eine p-Sylow Untergruppen von H.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{alle } p\text{-Sylow UG} \\ \text{sind konjugiert} \\ \text{in } H}}{\Longrightarrow}$ $\quad \exists\, h \in H$ mit $gPg^{-1} = hPh^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h^{-1}gP\underbrace{(h^{-1}g)^{-1}}_{g^{-1}h} = P$$

$\Rightarrow h^{-1}g \in N_G(P)$

$g = (g_1, \dots, g_m) \qquad gg' = (g_1 g_1', \dots, g_m g_m')$

$g' = (g_1', \dots, g_m')$

$\varphi(g)\varphi(g') = g_1 \cdot \dots \cdot g_m \, g_1' \cdot \dots \cdot g_m'$

$\parallel$ da $\quad g_i' \cdot g_j = g_j \cdot g_i' \quad \forall i \neq j$

$\varphi(gg') = g_1 g_1' \cdot g_2 \cdot g_2' \cdot \dots \cdot g_m g_m'$

φ ist ein Gruppenhom.

$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = |G| = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$

Injektivität von φ:

Angenommen $\quad \varphi(g_1, \dots, g_m) = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m = 1 \quad , g_i \in S_i$

$g_i \in S_i \quad , \Rightarrow \quad g_i^{|S_i|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{g_i^{p_i^{\alpha_i}} = 1}_{(*)}$

$g_1 \cdot \dots \cdot g_m = 1$

$\underline{\forall i = 1, \dots, m}$: $\quad (g_1 \cdot \dots \cdot g_m)^{\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}} = 1$

$\parallel (*)$

$g_i^{\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}} = 1$

$g_i^{p_i^{\alpha_i}} = 1$ und $g_i^{\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}} = 1$

teilerfremd

$\mathrm{Ord}_G\, g_i$ teilt $p_i^{\alpha_i}$ und $\frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}} \Rightarrow \mathrm{Ord}_G\, g_i = 1 \Rightarrow g_i = 1.$

$\Rightarrow (g_1, \dots, g_m) = (1, 1, \dots, 1) \Rightarrow \varphi$ ist injektive.

$|S_1 \times \dots \times S_m| = |G| \Rightarrow \varphi$ ist ein Gruppeniso

Wir haben $g = h \cdot \underset{\substack{\cap \\ N_G(P)}}{h^{-1} g}$, $h \in H$ $\Rightarrow$ $G = H \cdot N_G(P)$.

<u>Aufgabe 4</u> G Gruppe, $|G| < \infty$, $p \mid |G|$

Z.z.: $p \mid \#\{$ Lösungen von $x^p = e\}$

Wir nutzen den Hinweis

$C_p = \langle 1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1} \rangle = \langle \sigma \rangle$ wirkt auf $X = \{(g_1, \ldots, g_p) \mid g_i \in G, \; g_1 \cdot \ldots \cdot g_p = e\}$

$C_p \cong \mathbb{Z}/p$

$$\sigma . \underbrace{(g_1, g_2, \ldots, g_p)}_{\in X} = (g_p, g_1, g_2, \ldots, g_{p-1}) \in X$$

da $g_p \cdot g_1 \cdot \ldots \cdot g_{p-1} = g_p \cdot \underbrace{(g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_{p-1} \cdot g_p)}_{e} \cdot g_p^{-1} = e$

$|C_p| = p \Rightarrow C_p$ ist eine p-Gruppe.

Es folgt aus der Vorlesung (Lemma 5.9), dass

$$|X^{C_p}| \equiv |X| \mod p \quad (\text{da } C_p \text{ ist eine } p\text{-Gruppe})$$

$x \in X^{C_p} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sigma x = x$

$x = (g_1, \ldots, g_p) \in X^{C_p} \Longleftrightarrow \sigma x = (g_p, g_1, g_2, \ldots, g_{p-1}) = x = (g_1, g_2, g_3, \ldots, g_p)$

$\Longleftrightarrow g = g_1 = g_2 = \ldots = g_p \qquad e = g_1 \cdot \ldots \cdot g_p = g^p$

$$X^{C_p} = \{(g, \ldots, g) \mid g^p = e\}$$

Es folgt dass

$|\{\text{Lösungen von } x^p = e\}| = |X^{C_p}| \equiv |X| \equiv 0 \mod p$

da C_p eine p-Gruppe ist

$X = \{(g_1, g_2, \dots, g_p) \in \underbrace{G \times \dots \times G}_{p\text{-Mal}} \mid g_1 \cdot \dots \cdot g_p = 1\}$

$(g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_{p-1}) \cdot g_p = 1$

$g_1, \dots, g_{p-1}$ können beliebige sein,
dann g_p ist eindeutig definiert

$|X| = |G|^{p-1} \equiv 0 \mod p$ (da $p \mid |G|$)