

Algebra

Übungsblatt 10

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
09.01.2023

Aufgabe 1. Sei $n \geq 1$, p eine Primzahl und $m \geq 1$ sodass m nicht von p geteilt wird. Sei $1 \leq s \leq n$.

(1) Zeige, dass $p^{n-s+1} \nmid \binom{m \cdot p^n}{p^s}$.

(2) Beweise oder widerlege, dass $p^{n-s} \mid \binom{m \cdot p^n}{p^s}$.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Zeige:

(1) Ist G auflösbar, so sind auch H und G/N auflösbar.

(2) Sind N und G/N auflösbar, so ist auch G auflösbar.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 33$ und X eine G -Menge mit $|X| = 19$. Zeige: Es existiert ein Fixpunkt in X (d.h. $X^G \neq \emptyset$).

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Operation von $\text{GL}_n(K)$

auf K^n . Bestimme den Stabilisator von $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$.

Aufgabe 5. Seien p eine Primzahl und \mathbb{F}_p ein Körper mit p Elementen. Zeige:

$$|\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i).$$

Hinweis: Benutze die Induktion nach n und Aufgabe 3.